

平成 21 年 5 月 14 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340046

研究課題名 (和文) 完全積分可能系に関する可換微分作用素環および  
その固有函数の構造研究課題名 (英文) A study of commutative rings of differential operators in  
completely integrable models and their eigenfunctions

研究代表者

伊達 悦朗 (DATE ETSURO)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：00107062

研究成果の概要：量子力学系の性質を定量的に記述することは一般には困難であるがその中で完全積分可能系と呼ばれるクラスに関しては多少とも詳しい記述が可能であると思われる。これまでの研究の多くはそのような系のある種の無限次元代数系の表現論と関連づける形でなされてきている。本研究においてはそのような関連をほかの諸分野、たとえばフックス型微分方程式の理論などと関連づけるなどにより広げることにより幅広い手法の適用可能性を示した

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	2,700,000	0	2,700,000
2006 年度	2,100,000	0	2,100,000
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
総計	7,800,000	900,000	8,700,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系，一般超幾何微分方程式

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初においては Veselov, Chalykh 等により，ソリトン理論において大きな役割をはたした Baker-Akhiezer 函数の多変数版を用いた Calogero-Moser-Sutherland 系の研究およびそれから派生したルート系の変形，ホイヘンスの原理を満たす新たな微分作用素の構成などの研究などがあり，可積分系をめぐる新たな研究の方向と考えられていた。

## 2. 研究の目的

当初は完全積分可能な多体量子力学系の構造，特にその固有函数の構造について理解を

深めることを目指していた。とりわけルート系と関係する量子可積分系の固有函数の大数的な性質に関してより深い知見を得ることを目指した。Veselov, Chalykh 等の研究の方向をさらに進めて，ルート系の新たな変形を求めること，あるいはそれに関係して登場する Baker-Akhiezer 型函数のより詳しい性質をソリトン理論との関連で調べることなどにより可積分系の新たな側面を見出し，同時に関連する諸分野との係わりについての理解を深め，可積分系の内容を豊かなものにしたと考えた。

### 3. 研究の方法

すでに見いだされているルート系の変形に対応する Dunkl 作用素の類似物を考えアフィンヘッケ環などの代数系に近い構造があるかどうか調べる。同時に、関連する代数系について調べる。また Baker-Akhiezer 型関数の性質をより詳しく調べるために確定特異点型の微分作用素の理論などとの関連を調べる。またこれらの手法と二次元可解格子模型を解く際に用いられる Bethe 仮説の方法との関連も探る。

### 4. 研究成果

Chalykh, Feigin 等と連絡をとりつつ、ルート系の変形の新しい例を探すことを試みてみてみたが明確な成果を得ることはできなかった。またルート系の変形に対応する Dunkl 作用素の類似物を考えても、通常のルート系の場合とは異なりそれらは可換とはならず、別の観点が必要であることがわかった。Feigin の最近の研究によれば知られているそのようなルート系の変形の多くはより高次元の通常のルート系のある種の射影めいたものと考えることができる。代数的側面を調べるにはこの視点からの見直しが必要と思われる。

Baker-Akhiezer 型関数は指数関数と有理式の積の形を持つ。指数関数の部分の形は定まっており有理式の部分を決定することが問題となる。その決定の手法には二次元格子上の統計力学模型を解く際に用いられる Bethe 仮説の方法と似た面がある。またこの関数の有理関数部分の展開係数は後に述べる準不変式となっている。これらの関数についてこれまでに知られているのは存在定理であり、立ち入った性質についてはほとんどわかっていない。具体形を求めるためにも後に述べる準不変式について調べた。最近の野海らの研究により Macdonald 多項式の一般化ともみることができ Koornwinder 多項式について変数と添字に関してある種の双対性があることがわかった。このような観点が多変数 Baker-Akhiezer 型関数に対して有効であるかどうかは今後の課題である。

上に述べた Bethe 仮説の手法との関連で、二次元可解格子模型の一つである chiral Potts 模型の基底状態を記述するさいに用いられる多項式について調べてみた。これは直接には上に述べた問題とはつながらないのであるが、量子力学系を定義するハミルトニアン固有ベクトルを調べるという観点を通してつながっている。von Gehlen と Roan はそれらを成分とするベクトルがある種の一階の連立微分方程式をみたすこと示し、さらに格子模型の各頂点に与える変数のとる値  $N$  の範囲が小さい場合に個々の成分が満たす高階の微分方程式を導いた。 $N=2$  の場

合には超幾何微分方程式であり、 $N=3$  の場合にも具体形を与えているが知られているものとの同定はなされていなかった。彼らは直交多項式との関連を探ろうと試みているが明確な結論は得られていない。この研究では、数式処理を用いて種々の具体例の計算を行い冪関数の補正を行えばそれらの微分方程式が一般超幾何微分方程式であることを見いだした。成分毎にこの一般超幾何微分方程式は少しずつ異なっている。微分方程式の立場からの研究では高階の一般超幾何微分方程式を一階の連立微分方程式に書き換えるという研究は行われているが、ここでの作業はその逆の方向であり、また異なる一般超幾何微分方程式が混じりあったものであり、従来の研究ではあまり注目されてこなかった部分である。そのため全くの手探りで計算であった。計算過程において、Stirling 数あるいはその一般化である数を成分に持つような行列、及びその逆行列を用いる計算が必要となった。

この結果によりこれまで可積分系とフックス型微分方程式の理論との関係は共形場理論の相関関数が満たす微分方程式として、あるいは chiral な共形場理論に現れる Knizhnik-Zamolodchikov 方程式との関係などとして知られていたが、さらに新たな関係を付け加えることになり可積分系の理論をより深いものとした。このような研究を通してこれまでそれほど注目されてこなかった一般超幾何微分方程式ではあるが可積分系の研究と広いつながりがあることに一端が明らかになった。一般超幾何関数と直交多項式との関連について調べることも今後の課題である。特に、模型の固有値、固有ベクトルの詳しい情報を得るにはこれらの多項式の零点に関して調べることが必要となる。物理学的な考察からはそれらがすべて実数で単純であると思われるがまだ数学的な証明はない。また基底状態ではない一般の場合に対しては、まだ数学の立場からの結果はない。そこに現れる多項式が  $sl_2$  型のループ代数の有限次元表現の Drinfeld 多項式と関連しているという出口-西野の研究があるが、まだその具体的なつながりについては解明されていない。

もともとの目的に近い成果としては大学院生の土田忠義がおこなった準不変式に関する研究がある。準不変式は Calorero-Moser-Sutherland 系の積分(系のハミルトニアンと可換な作用素)と対応しておりその具体形を求めることは重要な問題ではあるが、これまでほとんど知られていなかった。土田は  $n$  次対称群の場合に、Bandlow-Musiker が与えた二段の鉤型の場合の準不変式の具体形をもとに、一般の鉤型のヤング図形に対応する準不変式の自由基

底を与えた。この結果は今後の準不変式、さらには Baker-Akhiezer 型函数などの研究に大きな意味を持つと考えられる。

研究分担者（後に連携研究者）は代数的ゲーム理論、圧縮性粘性流体の方程式の漸近挙動、Bergman 核の漸近展開、量子代数の表現論、リー超代数の表現論、結晶基底の理論、Painleve 方程式などの研究を通して当初の研究目的をめざし成果をあげた。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 30 件）

- ① Etsuro Date, On differential equations of von Gehlen and Roan, *Glasgow Mathematical Journal*, 査読有, vol. 51, (2009), pp 43-48.
- ② Hai-Liang Li, Akitaka Matsumura, Behaviour of the Fokker-Planck-Boltzmann equation near a Maxwellian, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 査読有, vol. 189, (2008), pp 1-44.
- ③ Gen Komatsu, Asymptotic expansion of the Bergman kernel-elementary application of the invariant theory, *Complex analysis and its Applications, Proc. 15<sup>th</sup> ICFIDCAA Osaka 2007 OKAMI Studies vol. 2*, 査読有, 2008, pp 43-63.
- ④ I. Heckenberger, F. Spill, A. Torrielli, Hiroyuki Yamane, Drinfeld second realization of quantum affine superalgebras of  $D^{(1)}(2,1;x)$  via the Weyl groupoid, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, B8, (2008), pp171-216.
- ⑤ I. Heckenberger, Hiroyuki Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem, *Mathematische Zeitschrift*, 査読有, vol. 259, (2008), pp 255-276.
- ⑥ Kei Miki, A  $(q, \gamma)$  analog of the  $W_{1+\infty}$  algebra, *Journal of Mathematical Physics*, 査読有, vol. 48, (2007), 123520 (35pages.).
- ⑦ Masato Okado, A. Schilling, Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types, *Representation Theory*, 査読有, vol.12, (2008), pp 186-207.
- ⑧ K. Kajiwara, T. Masuda, Masatoshi Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada, Construction of hypergeometric solutions to the q-Painleve equations, *International Mathematical Research Notice*, 査読有, no. 24, (2005), pp 1441-1463.

〔学会発表〕（計 45 件）

- ① 松村 昭孝, 一次元圧縮性粘性流体の長時間挙動, 九州非線形偏微分方程式冬の学校, 2008年11月22日, 九州大学 箱崎キャンパス 工学部本館
- ② Noriaki Kawanaka, Plain Algorithms, Combinatorics and Representation Theory, 2008年9月3日, 名古屋大学多元数理科学研究科
- ③ Etsuro Date, On differential equations of von Gehlen and Roan, ISLAND3 Algebraic Aspects of integrable systems, 2007年7月6日, Islay, Scotland
- ④ 伊達 悦朗, superintegrable chiral Potts 模型に現れる多項式と一般超幾何微分方程式, アクセサリー・パラメータ研究会 2007, 2007年10月9日, 熊本大学 自然科学研究科
- ⑤ Gen Komatsu, Hadamard's variations in several complex variables, *Complex Analysis, Differential Geometry and Partial Differential Equations (Conference in Honor of the 80<sup>th</sup> Birthday of Masatake Kuranishi)*, 2005年5月3日, Columbia 大学数学教室.

〔図書〕（計 1 件）

- ① Etsuro Date, Elsevier, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, 2006, 5 vol. 679+729+645+673+549 pages (vol. 4, pp594-602 Solitons and Kac-Moody Lie algebra の項を担当)

[

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊達 悦朗 (DATE ETSURO)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：00107062

(2) 研究分担者 (2007 年度まで, 2008 年度は  
連携研究者)

川中 宣明 (KAWANAKA NORIAKI)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：10028219

松村 昭孝 (MATSUMURA AKITAKA)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：60115938

小松 玄 (KOMATSU GEN)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60108446

三木 敬 (MIKI KEI)

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：40212229

山根 宏之 (YAMANE HIROYUKI)

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：10230417

尾角 正人 (OKADO MASATO)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授

研究者番号：70221843

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80164672

### (3) 連携研究者