

平成 21 年 5 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340047

研究課題名 (和文) 箱玉系と組合せ的 Bethe 仮説

研究課題名 (英文) Box-ball systems and combinatorial Bethe ansatz

研究代表者

山田 泰彦 (YAMADA YASUHIKO)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00202383

研究成果の概要：

究極の離散ソリトン系である箱玉系について、組合せ的 Bethe 仮説の方法を用いて研究した。組合せ的 Bethe 仮説の基本的成果である KKR 写像により箱玉系を線形化し、これにより KKR 写像に表現論的 (結晶基底) 解釈を与えると共に、箱玉系の一般ソリトン解を導き、同時に KKR 写像の区分線形公式を与えた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	3,700,000	0	3,700,000
2006 年度	3,100,000	0	3,100,000
2007 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2008 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
総計	13,000,000	1,860,000	14,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、大域解析学(4105)

キーワード：可積分系、結晶基底、箱玉系、KKR 写像、組合せ論、Bethe 仮説、Painleve 方程式

1. 研究開始当初の背景

箱玉系 (Box-ball system) は、1990 年頃に高橋・薩摩により発見された超離散ソリトン系である。超離散とは、独立変数・従属変数の全てが離散化された究極的な離散系を意味する。2000 年前後に、この系のもつ対称性や結晶基底による定式化が見いだされ、表現論的および組合せ論的研究が可能となった。

このように、箱玉系は、連続の古典ソリトン系の超離散極限でもあり、一方で、量子可解格子模型の低温 (結晶極限) とも見なされ、両者の結節点として注目されていた。箱玉系のソリトン解は、古典ソリトン解の超離散

極限として得られるものと期待されていたが、玉の種類が一般の場合の、一般ソリトン解を構成することは、内部自由度の組合せ論的複雑さのために困難であった。

2. 研究の目的

可解格子模型における伝統的かつ有力な方法は Bethe 仮説の方法である。この方法から生まれた KKR 写像と呼ばれる巧妙な全単写は、格子模型に留まらず、表現論やヤング図形の種々の組合せ論への様々の応用をもつ。本研究では、この KKR 写像を箱玉系に応用し、逆散乱法的な解の構成を与えることを 1 つ目

の課題とした。

一方、KKR 写像そのものについても、複雑巧妙な組合せ的アルゴリズムにより定義されており、その表現論的意味は明確ではなかった。これを結晶基底の観点から解明することは、箱玉系への応用のためにも重要と考えられ、2つ目の研究課題とした。

最後に、箱玉系の表現論的定式化においては、組合せ R と呼ばれる変換が基本的な役割を果たすが、これは離散 Painleve 方程式に現れるワイル群の双有理表現に密接な関係がある。こうした関連を通して、離散 Painleve 方程式と箱玉系双方の解明を目指すことを3つ目の研究課題とした。

3. 研究の方法

国場、尾角、坂本玲峰、高木太一郎、山田は、研究の手がかりとして、箱玉系の時間発展が KKR 写像により線形化されるという現象を実験的に掴んでいた。そこで、まずはこの現象の理論的解明に取り組んだ。結果として、KKR 写像により得られる Rigged configuration (RC) と呼ばれる組合せ的対象を箱玉系のソリトンの自由度に関係させることができた。(国場他、“Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection”, Nuclear Phys. B 740 (2006)) これにより、2番目の課題に一定の解答を得るとともに、課題1についての基礎が得られた。その方向の研究は、国場、坂本、山田により続けられた。

一方、課題3の離散 Painleve 方程式に関しては、A型以外のワイル群の表現への興味から、太田、増田、山田、鈴木貴雄等を中心としてD型ソリトン系やE型離散 Painleve 系に関する実験的および理論的研究が進められた。

4. 研究成果

上述の課題2の解決を基礎として、国場・坂本・山田は、A型箱玉系の一般ソリトン解の構成に成功した。(“Tau functions in combinatorial Bethe ansatz”, Nuclear Phys. B 786 (2007), 3, 207--266.) これは同時に KKR 写像に明示的区分線形公式を与えるものでもあり、本研究における最も重要な成果のひとつである。さらに、国場、坂本および竹野内は、この結果の周期箱玉系への拡張も考察し、超離散テータ関数による一般解の構成など重要な成果を挙げた。また尾角は、幾何結晶の観点から表現論的研究を行い、KR 加群の結晶構造や組合せ的 R の理論を進展させた。今後の研究で、箱玉系への応用などが期待される。

一方、離散 Painleve 系に関しては、梶原、野海、太田、増田、山田によって、特殊解や超離散ワイル群表現について、タウ関数の観

点からの研究が進められた。この過程で、特に幾何学的な理解が進展し、ワイル群を基本とする表現論的方法から少し離れることとなったが、結果として Pade 近似による特殊解の構成という有用な副産物が得られた (Y. Yamada “Pade method to Painleve equation”, Funkcialaj Ekvacioj, 52, (2009), 83-92.)。これは、楕円 Painleve 方程式の Lax 形式に対する重要なヒントとなった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 30 件)

(1) M. Kashiwara, T. Nakashima, M. Okado, “Affine geometric crystals and limit of perfect crystals”, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 7, 3645--3686. 査読有り

(2) M. Okado, A. Schilling, “Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types”, Represent. Theory 12 (2008), 186--207. 査読有り

(3) A. Kuniba, R. Sakamoto, “Combinatorial Bethe ansatz and generalized periodic box-ball system.”, Rev. Math. Phys. 20 (2008), no. 5, 493--527. 査読有り

(4) A. Kuniba, R. Sakamoto, Y. Yamada, “Tau functions in combinatorial Bethe ansatz”, Nuclear Phys. B 786 (2007), 3, 207--266. 査読有り

(5) A. Kuniba, R. Sakamoto, “Combinatorial Bethe ansatz and ultradiscrete Riemann theta function with rational characteristics”, Lett. Math. Phys. 80 (2007), no. 3, 199--209. 査読有り

(6) M. Okado, “X=M conjecture, Combinatorial aspect of integrable systems, 43--73, MSJ Mem., 17, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007. 査読有り

(7) Y. Ohta, K-I. Maruno, M. Oikawa, “Two-component analogue of two-dimensional long wave--short wave resonance interaction equations: a derivation and solutions”, J. Phys. A 40 (2007), 27, 7659--7672. 査読有り

(8) C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, Y. Ohta, “Quasideterminant solutions of a non-abelian Hirota-Miwa equation”, J.

Phys. A 40 (2007), 42, 12607--12617. 査読有り

(9) K. Kajiwara, M. Mazzocco, Y. Ohta, "A remark on the Hankel determinant formula for solutions of the Toda equation", J. Phys. A 40 (2007), 42, 12661--12675. 査読有り

(10) T. Masuda, "The anti-self-dual Yang-Mills equation and the Painlevé III equation", J. Phys. A 40 (2007), 48, 14433--14445. 査読有り

(11) M. Noumi, "Special functions arising from discrete Painlevé equations: a survey", J. Comput. Appl. Math. 202 (2007), 1, 48--55. 査読有り

(12) Y. Ohta, "A generalization of the discrete UC hierarchy and its reductions", Difference equations, special functions and orthogonal polynomials, 471--479, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007. 査読有り

(13) M. Kashiwara, K. C. Misra, M. Okado, D. Yamada, "Perfect crystals for $U_q(D_4(3))$ ", J. Algebra 317 (2007), 1, 392--423. 査読有り

(14) M. Okado, "Existence of crystal bases for Kirillov-Reshetikhin modules of type D", Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), 4, 977--1004. 査読有り

(15) A. Kuniba, R. Sakamoto, "The Bethe ansatz in a periodic box-ball system and the ultradiscrete Riemann theta function", J. Stat. Mech. Theory Exp. 2006, 9, P09005, 12 pp. (electronic). 査読有り

(16) A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi, Y. Yamada, "Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection", Nuclear Phys. B 740 (2006), 3, 299--327. 査読有り

(17) A. Kuniba, T. Takagi, A. Takenouchi, "Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system", Nuclear Phys. B 747 (2006), 3, 354--397. 査読有り

(18) A. Kuniba, A. Takenouchi, "Bethe

ansatz at $q=0$ and periodic box-ball systems", J. Phys. A 39 (2006), 11, 2551--2562. 査読有り

(19) S. Mizoguchi, K. Mohri, Y. Yamada, "Five-dimensional supergravity and the hyperbolic Kac-Moody algebra GH_2 ", Classical Quantum Gravity 23 (2006), no. 9, 3181--3193. 査読有り

(20) K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada, "Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlevé equation", Théories asymptotiques et équations de Painlevé, 169--198, Sémin. Congr., 14, Soc. Math. France, Paris, 2006. 査読有り

(21) K. -I. Maruno, Y. Ohta, "Casorati determinant form of dark soliton solutions of the discrete nonlinear Schrödinger equation", J. Phys. Soc. Japan 75 (2006), 5, 054002, 10 pp. 査読有り

(22) A. Ramani, Y. Ohta, B. Grammaticos, "Discrete systems related to the sixth Painlevé equation", J. Phys. A 39 (2006), 39, 12167--12178.

(23) T. Tsuda, T. Masuda, "q-Painlevé VI equation arising from q-UC hierarchy", Comm. Math. Phys. 262 (2006), 3, 595--609. 査読有り

(24) K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada, "Construction of hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations", Int. Math. Res. Not. 2005, 24, 1441--1463. 査読有り

(25) K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada, "Cubic pencils and Painlevé Hamiltonians", Funkcial. Ekvac. 48 (2005), 1, 147--160. 査読有り

(26) A. Kuniba, M. Okado, Y. Yamada, "Box-ball system with reflecting end", J. Nonlinear Math. Phys. 12 (2005), 4, 475--507. 査読有り

(27) C. X. Li, Y. Ohta, "Gram-type Pfaffian solution to the coupled discrete KP equation", J. Phys. A 38 (2005), 5, 1089--1095. 査読有り

(28) M. Nishizawa, Y. Ohta, S. Tsujimoto, "Some aspects of the Toda

molecule” ,.Glasg. Math. J. 47 (2005), A, 169--176. 査読有り

(29) T.Masuda, “Special polynomials associated with the Noumi-Yamada system of type $A(1)_5$ ” . Funkcial. Ekvac. 48 (2005), 2, 231--246. 査読有り

(30) T.Masuda, “The anti-self-dual Yang-Mills equation and classical transcendental solutions to the Painlevé II and IV equations” , J. Phys. A 38 (2005), 30, 6741--6757. 査読有り

[学会発表] (計 20 件)

(1) 井上・伊山・国場・中西・鈴木、「T-system の周期性について」、日本数学会一般講演、2009 年 3 月 29 日、東京大学

(2) 山田泰彦、「離散 Painleve 方程式の幾何学的 Lax 形式」、日本数学会特別講演、2009 年 3 月 29 日、東京大学

(3) 梶原・太田、「Nou-autonomous discrete KdV 方程式の双線形化と Casorati 行列式解」、日本数学会一般講演、2008 年 9 月 24 日、東京工業大学

(4) 増田哲、「q-Painleve 系の超幾何タウ関数」、日本数学会特別講演、2008 年 9 月 24 日、東京工業大学

(5) Y.Yamada, “Geometry of elliptic Painleve equation and their hypergeometric solutions” , Elliptic integrable systems, 2008 年 7 月 21 日, Max Plunk Institute (Germany)

(6) 山田泰彦、「Pade 近似と Painleve 方程式の特殊解」、日本数学会一般講演、2008 年 3 月 24 日、近畿大学

(7) 山田泰彦、「E 型アメーバ図鑑 (その採取と観察)」、物理談話会、2007 年 11 月 6 日、東京大学

(8) 山田泰彦、「Geometric formulation of discrete Painleve equation and its tological analog」、トロピカル幾何学と関連分野、2007 年 9 月 11 日、北海道大学

(9) 尾角正人、「 $D_n(1)$ 型 KR 加群の結晶基底について」、日本数学会一般講演、2007 年 3 月 30 日、埼玉大学

(10) 国場・坂本・山田、「Tau functions in

combinatorial Bethe ansatz」、日本数学会一般講演、2007 年 3 月 30 日、埼玉大学

(11) 山田泰彦、「KKR map and ultradiscrete KP, Integrable systems and Combinatorics」、2007 年 2 月 20 日、大阪大学

(12) 山田泰彦、「Pade 近似と Painleve 方程式」、代数解析セミナー、2007 年 2 月 1 日、早稲田大学

(13) 山田泰彦、「Painleve 方程式の Hamiltonian について」、凝縮系理論セミナー、2006 年 11 月 29 日、筑波大学

(14) 山田泰彦、「Symmetries of generalized Painleve equations」、2006 年度表現論シンポジウム招待講演、2006 年 11 月 15 日、湯河原

(15) 国場・坂本・高木・竹野内、「Bethe ansatz in a periodic bax-ball system and ultradiscrete Riemann theta function」、日本数学会一般講演、2006 年 9 月 20 日、大阪市立大学

(16) 国場・尾角・坂本・高木・山田、「Crystal interpretation of KKR bijection」、日本数学会一般講演、2006 年 3 月 29 日、中央大学

(17) 増田哲、「q-差分 Painleve 方程式に対するトロピカル表現と総線形関係式」、日本数学会一般講演、2005 年 9 月 20 日、岡山大学

(18) 山田泰彦、「可積分系と双有利変換」、日本数学会企画特別講演、2005 年 9 月 19 日、岡山大学

(19) 柏原・尾角・中島、「Affine Geometric crystals and tropical R」、日本数学会一般講演、2005 年 9 月 19 日、岡山大学

(20) 尾角正人、「可解格子模型から生まれる組合せ論的な問題について」、日本数学会特別講演、2005 年 9 月 19 日、岡山大学

[図書] (計 3 件)

(1) A.Kuniba, M.Okado ed. “Combinatorial aspect of integrable systems”, MSJ Memoirs, 17. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 167 頁, 2007.

(2) P.A.Clarkson, N.Joshi, M.Mazzocco, F.W.Nijhoff, M.Noumi, ed. “Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre” [C. R. Acad. Sci. Paris 141 (1905), 555--558]. J. Phys. A 39 (2006)

(3)山田泰彦著、土屋昭博・砂田利一 共編、
数理物理シリーズ 1, 「共形場理論入門」 培
風館, 265 頁, 2006

[その他]

(1)国場敦夫、「ペーテ仮説とヤング図形」、
数理科学「ヤング図形で遊ぶ物理と数学」
(2007) 1月号 27--32.

(2)山田泰彦、「微分方程式とヤング図形」、
数理科学「ヤング図形で遊ぶ物理と数学」
(2007) 1月号 15--20.

6. 研究組織

(1)研究代表者

山田 泰彦 (YAMADA YASUHIKO)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号：00202383

(2)研究分担者

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)
神戸大学・自然科学系先端融合研究環・教授
研究者番号：80164672

太田 泰広 (OHTA YASUHIRO)
神戸大学・理学研究科・准教授
研究者番号：10213745

(3)連携研究者

国場 敦夫 (KUNIBA ATSUO)
東京大学・総合文化研究科・准教授
研究者番号：70211886

尾角 正人 (OKADO MASATO)
大阪大学・基礎工学研究科・准教授
研究者番号：70221843

高野 恭一 (TAKANO KYOICHI)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：10011678

増田 哲 (MASUDA TETSU)
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号：00335457