

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2005～2008

課題番号：17340049

研究課題名（和文） 微分方程式の解の積分表示に関する解析学と幾何学

研究課題名（英文） Analytical and Geometrical Study of Integral Representations of Differential Equations

研究代表者

原岡 喜重（HARAOKA YOSHISHIGE）

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：30208665

研究成果の概要：積分で表示される解をもつような線形微分方程式は、線形微分方程式の中でも特別な良いクラスをなしている。そのクラスの方程式の研究は、積分表示における積分領域の研究に帰着され、関数としての解析的性質と積分領域の幾何学的性質の対応を記述するのが基本的な問題となる。rigid と呼ばれるさらに良い部分クラスの方程式に対して、その対応が記述された。また方程式をなるべく多くの変数の方程式系に拡張すること（延長）により、良いクラスに属する方程式の判定法の新しい可能性を見出した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,300,000	0	3,300,000
2006年度	2,400,000	0	2,400,000
2007年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2008年度	2,900,000	870,000	3,770,000
年度			
総計	11,300,000	1,680,000	12,980,000

研究分野：微分方程式論，特殊関数論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：超幾何関数，漸近展開，ねじれホモロジー，rigid 局所系，モノドロミー，アクセサリー・パラメーター，middle convolution，完全積分可能系

1. 研究開始当初の背景

(1) 微分方程式の解の積分表示に関わる研究は、様々な研究分野の交錯する場として魅力にあふれる。そのため様々な方向からの研究が進められてきたが、積分表示における積分領域（cycle）と関数としての漸近挙動の対応の確立、解が積分表示を持つ微分方程式の特徴づけ、といった基本的問題は、あまり正面からは取り上げてこられなかった。本研究はこれらの基本的問題に取り組みながら、数論・表現論・超平面配置の幾何学・数理論などとの関わりを追求することを目指し

ていた。

(2) 局所係数の（コ）ホモロジー理論，超平面配置の理論，合流型超幾何関数の統一的研究など，本研究の足場となる研究が進展していた。また微分方程式については，Deligne-Simpson 問題や quiver variety 論など関りの深い研究が盛んに行われていた。

2. 研究の目的

(1) 解が積分表示を持つような微分方程式において、積分表示の cycle の幾何学的性質と関数としての漸近挙動との対応関係を記述

する，という基本問題に取り組むのが第一の目的である．

(2) また解が積分表示を持つような微分方程式を特徴づけるという基本問題については，完全な解決は非常に困難と予想されるが，解決の方向性をもたらすような例の発見，既存の例の新しい解釈などを通じて本質的な貢献をすることが第二の目的である．

(3) さらにこれらの研究を通して，微分方程式と多方面の数学との関わりを追求し，豊かな数学的世界を構築していくことを目指していた．

3. 研究の方法

(1) 研究の方法としては，新しい局面をもたらすような例を見出してその例を足がかりに考察を進める，国内外の研究者との交流や論文講読によって多様な知見を獲得する，という二つが基本である．

例の計算は，研究組織のメンバーがそれぞれの視点から行い，適宜セミナーなどを開いて考察を進める．研究者との交流では，まず本研究の内容をテーマにした研究集会を開催し，関係する分野で活発な研究活動を行っている研究者同士の交流を図る．また国内外で開催される種々の研究集会等へ参加し，発表や議論を通して多様な知見の獲得と研究の深化に努める．

(2) 主催した研究集会は次の通りである．

「アクセサリー・パラメーター研究会」

日時：2006年6月20日～6月22日
場所：熊本大学大学院自然科学研究科
講演数：11

プログラム等は次の URL を参照

<http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~haraoka/ap2006.html>

「アクセサリー・パラメーター研究会」

日時：2007年10月8日～10月10日
場所：熊本大学大学院自然科学研究科
講演数：13

プログラム等は次の URL を参照

<http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~haraoka/ap2007.html>

(落合啓之氏(名古屋大学)と共催)

「Workshop on Accessory Parameters」

日時：2008年8月4日～7日
場所：東京大学玉原国際セミナーハウス
講演数：17

プログラム等は次の URL を参照

<http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/programtW1.pdf>

(大島利雄氏(東京大学)と共催)

「Workshop on Accessory Parameters」

日時：2009年2月21日～2月24日
場所：熊本大学理学部
講演数：14

プログラム等は次の URL を参照

<http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~haraoka/ap2009.html>

(大島利雄氏(東京大学)と共催)

次は三松佳彦氏(中央大学)が主催しているシリーズの第47回を，大島利雄氏と共同で企画したものである．

Encounter with Mathematics 第47回「アクセサリー・パラメーターとモノドロミー -- 微分方程式の未開の領域を目指して --」

日時：2008年10月17日～10月18日

場所：中央大学

講演数：5

プログラム等は次の URL を参照

<http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/>

4. 研究成果

(1) 研究の主な成果

rigidなFuchs型方程式の解の積分表示について，特殊なSelberg型積分からのreductionで構成できることを示し，特異点における漸近挙動を与えるcycleを特定した対応する局所係数の(コ)ホモロジー群の解析を行った．

Appell超幾何関数 F_4 のモノドロミー表現のrigidityを示し，多変数のrigidityの定式化を実質的に行った．また切り口のrigidityとのずれを見出し，制限・延長とrigidityの関係という研究テーマを着想した．

Katzアルゴリズムに現れるadditionとmiddle convolutionという二つの操作が，変形方程式を不変に保つことを示した．

Dotsenko-Fateevの求めた3階Fuchs型方程式はアクセサリー・パラメーターを2個含むが，それらの値が多変数への延長可能性によって特定されるという特徴付けを得た．さらにRiemann scheme自体も延長可能性によって決定される．この場合の延長は，singular locusへの制限の逆を考える．この延長が切り口によって一意的に決まることも示した．

有限既約複素鏡映群をモノドロミーに持つ完全積分可能系で生成的なものの存在を，構成的に示した．これは従来加藤満生氏によって常微分方程式として部分的に求められていたものを，多変数へ延長することで体系的に構成したものである．この完全積分可能系をもとに，その変形となる完全積分可能系の族を構成することもできた．

rigidなFuchs型方程式の解の積分表示で，レゾナンスが起きている場合に，特性指数を実現するcycleの構成法を発見した．

(2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

一連の成果は，古典的な線形常微分方程式の世界に新しい切り口をもたらし，大きな発展の可能性を示唆したのものとして受け止め

られたように思われる。実際、いろいろな機会における成果発表を通して、多数の研究者が middle convolution をはじめとする本研究に関連する内容を吸収し、この分野に参入したりそれぞれの分野で新しい方向性を打ち出してきている。

個々の成果のうち は基本定理であり、既にいくつかの研究の基礎として用いられ始めている。 で与えた延長・制限と rigidity の関係は、新しい有用な視点として多くの研究者の共感を頂いている。

本研究の成果は、あるテーマに最終解決をもたらしたのではなく、発展の方向性を見出したものなので、位置づけは今後の展開によって判断されるのが適当であるように思われる。

(3) 今後の展望

本研究で得られた成果は、複素領域における線形微分方程式系の研究に多くの刺激を与えたと考えられる。研究集会などを通して様々な新しい研究が始められてきていて、今後の大きな展開が期待される。

不確定特異点型も含めた線形常微分方程式の基礎理論を進展させることが期待される。具体的には、middle convolution などによる分類・構成問題、見掛けの特異点やアクセサリー・パラメーターの系統的な扱い、不確定特異点型方程式に対する rigidity の定義、合流操作と rigidity の関係など、重要な多くの問題が明らかになったので、これらの解決が基礎理論を進展させると考えられる。

延長・制限を通して、常微分方程式と多変数の完全積分可能系を双方向的に研究するという視点も有望と考えられる。特に多変数の場合の middle convolution の定式化、多変数完全積分可能系を系統的に構成する手法の開発、singular locus の幾何学と rigidity の関係など、生産的で興味深い問題が考えられる。微分方程式の変形理論との関係も興味深い問題となる。

微分方程式の解の積分表示に関しては、主な研究成果の で扱った方向の進展も期待される。さらに合流型の積分表示における漸近挙動を与える cycle の構成は、依然として未解決問題で、今後の進展が期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計13件)

S. Ito and T. Sadahiro, Beta expansions with negative bases, Integers, 掲載決定, 査読有

M. Kato, Algebraic transformations of ${}_3F_2$, Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008),

221-243, 査読有

Y. Haraoka and Y. Ueno, Rigidity for Appell's hypergeometric series F_4 , Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008), 149-164, 査読有

Y. Haraoka, Studies on deformation of Fuchsian systems from the viewpoint of rigidity, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B5 (2008), 51-60, 査読有

S. Shimomura, A class of differential equations of PI-type with the quasi-Painleve property, Ann. Math. Pura Appl., 186 (2007), 267-280, 査読有

S. Tanabe, Logarithmic vector fields and multiplication table, Proc. of the Trieste Singularity Summer School and Workshop (2007), 749-778, 査読有

S. Tanabe, On Horn-Kapranov uniformisation of the discriminantal loci, Adv. Stud. in Pure Math., 46 (2007), 223-249, 査読有

Y. Haraoka and G. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, J. London Math. Soc., 76 (2007), 438-450, 査読有

S. Tanabe, On perturbation of roots of homogeneous algebraic systems, Mathematics of Computation, 75 (2006), 1383-1402, 査読有

S. Shimomura, A family of solutions of a higher-order PVI equation near a regular singularity, J. Phys. A: Math. Gen., 39 (2006), 12153-12165, 査読有

T. Sadahiro, Multiple points of tilings associated with Pisot numeration systems, Theoret. Comput. Sci., 359 (2006), 133-147, 査読有

Y. Haraoka and T. Yokoyama, Construction of rigid local systems and integral representations of their sections, Math. Nachr., 279 (2006), 255-271, 査読有

T. Yokoyama, Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy, Math. Nachr., 279 (2006), 327-348, 査読有

[学会発表](計30件)

原岡喜重, アクセサリー・パラメーターの問題-微分方程式の未開の領域を目指して-, 2009年度日本数学会年会企画特別講演, 2009年3月29日, 東京大学
S. Tanabe, Monodromy of isolated hypersurface singularities, I, II, Mathematics Seminar, 2009年3月24日, 26日, Galatasaray Univ., Istanbul,

Turkey

田邊晋, Global monodromy group of an affine complete intersection associated to a Calabi-Yau variety, 短期共同研究「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」, 2009年2月5日, 京都大学数理解析研究所

原岡喜重, Rigidityの視点によるモノドロミーの研究, 短期共同研究「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」, 2009年2月4日, 京都大学数理解析研究所

加藤満生, 有限既約複素鏡映群をモノドロミーに持つ微分方程式系とその変形」, 短期共同研究「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」, 2009年2月4日, 京都大学数理解析研究所

原岡喜重, アクセサリー・パラメーターの決定問題, Encounter with Mathematics 第47回「アクセサリー・パラメーターとモノドロミー」, 2008年10月18日, 中央大学

横山利章, RigidなOkubo方程式系の構成と接続問題, Encounter with Mathematics 第47回「アクセサリー・パラメーターとモノドロミー」, 2008年10月17日, 中央大学

S. Tanabe, Monodromy groups for complete intersection related to Calabi-Yau complete intersections in projective spaces, 研究集会「Analysis and Geometry on complex algebraic varieties」, 2008年9月25日, Independent Univ. of Moscow, Russia

Y. Haraoka, Prolongation of Fuchsian differential equations and computability of the monodromy, 研究集会「Formal and Analytic Solutions of Differential Equations」, 2008年8月13日, Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland

横山利章, 大久保方程式系の拡大・縮小と接続問題, 研究集会「Workshop on Accessory Parameters」, 2008年8月6日, 東京大学玉原国際セミナーハウス

原岡喜重, Katzアルゴリズムと変形理論 I, II, 研究集会「Workshop on Accessory Parameters」, 2008年8月5日, 6日, 東京大学玉原国際セミナーハウス

原岡喜重, Appell's F_4 , middle convolution and Painleve VI, 研究集会「From Painleve to Okamoto」, 2008年6月12日, 東京大学

下村俊, Painleve transcendents in a sectorial domain, 研究集会「From Painleve to Okamoto」, 2008年6月12

日, 東京大学

下村俊, 角領域における値分布論とその応用, 2008年度日本数学会年会特別講演, 2008年3月24日, 近畿大学

原岡喜重, Topological theory for Selberg type integrals coming from rigid local systems, 研究集会「超幾何方程式研究会2008」, 2008年1月8日, 神戸大学

田邊晋, Monodromy of period integrals associated to Calabi-Yau varieties, 研究集会「Geometry and Analysis on complex algebraic varieties」, 2007年11月22日, 東京農工大学

貞広泰造, Connectedness of domino tilings with impurities, 研究集会「準周期構造のスペクトル解析と関連する話題」, 2007年11月19日, 京都大学数理解析研究所

原岡喜重, On computability of the monodromy for regular holonomic systems, 広島複素解析セミナー, 2007年11月14日, 広島大学

原岡喜重, 微分方程式の延長, モノドロミーの計算可能性および変形理論, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2007年10月10日, 熊本大学

木村弘信, Schlesinger系の合流とtwister的見方, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2007年10月10日, 熊本大学

21 加藤満生, 有限既約複素鏡映群をモノドロミーに持つ微分方程式, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2007年10月10日, 熊本大学

22 田邊晋, Invariants of the monodromy group associated to the period integrals for complete intersections, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2007年10月10日, 熊本大学

23 原岡喜重, Rigidity for regular holonomic systems, 数学系月例談話会, 2007年9月6日, 筑波大学

24 田邊晋, Transposition mirror symmetry construction and period integrals, 研究集会「Analysis and Geometry on complex varieties」, 2007年8月18日, Krasnoyarsk, Russia

25 Y. Haraoka, Studies on regular holonomic systems from the viewpoint of rigidity, 研究集会「Representation Theory, Systems of Differential Equations and their Related Topics」, 2007年7月3日, 北海道大学

26 H. Kimura, The general Schlesinger system and Ward correspondence, 研究集会「Representation Theory,

Systems of Differential Equations and their Related Topics」, 2007年7月3日, 北海道大学

- 27 原岡喜重, Rigid local systemとその切断の積分表示, および接続係数, Lie 群論・表現論セミナー, 2007年6月19日, 東京大学
- 28 原岡喜重, Studies on deformation of Fuchsian systems from the viewpoint of rigidity, 研究集会「微分方程式系の代数解析と完全 WKB 解析」, 2006年12月12日, 京都大学数理解析研究所
- 29 原岡喜重, Rigidity for regular holonomic D-modules, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2006年6月20日, 熊本大学
- 30 原岡喜重, Middle convolution functor and deformation equations, 研究集会「Kobe Workshop on Ingetrable systems and Painleve systems」, 2005年11月23日, 神戸大学

〔図書〕(計 1件)

木村弘信, サイエンス社, 超幾何関数入門(特殊関数への統一的視点からのアプローチ), 2007年, 185頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

原岡 喜重 (HARAOKA YOSHISHIGE)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 30208665

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

木村 弘信 (KIMURA HIRONOBU)
(2005~2007年度は研究分担者)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40161575

田邊 晋 (TANABE SUSUMU)
(2006~2007年度は研究分担者)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 90432997

貞広 泰造 (SADAHIRO TAIZO)
(2005~2007年度は研究分担者)
熊本県立大学・総合管理学部・准教授
研究者番号: 00280454

下村 俊 (SHIMOMURA SHUN)
(2005~2007年度は研究分担者)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 00154328

横山 利章 (YOKOYAMA TOSHIAKI)
(2005~2007年度は研究分担者)
千葉工業大学・工学部・教授

研究者番号: 30210636

加藤 満生 (KATO MITSUO)

(2007年度は研究分担者)

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号: 50045043