

平成 21 年 6 月 29 日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2005～2008
 課題番号：17500185
 研究課題名（和文） 対称錐上の多変量解析の推測理論の新展開
 研究課題名（英文） Developments in inference theory of multivariate analysis on symmetric cones
 研究代表者
 今野 良彦（KONNO YOSHIHIKO）
 日本女子大学・理学部・教授
 研究者番号：00205577

研究成果の概要：

多変量正規分布の平均ベクトルや分散共分散行列の推定問題において、通常の推定量である標本平均ベクトルや標本分散共分散行列が非許容的であると結果（いわゆるスタイン現象、スタインにより提案された新たな推定法を縮小推定法と呼ぶ）がスタインにより示されて以来、スタイン現象や縮小推定法に関する研究がおおくなされている。本研究期間中に、縮小推定法の議論が十分に展開されていなかった多変量統計モデルにおいて、縮小推定法を考案し、理論的および数値実験比較の観点から縮小推定法の有効性を示した。縮小推定法の適用が、古典的な多変量統計モデルをこえて広く可能であることを明らかにした。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,300,000	0	1,300,000
2006年度	600,000	0	600,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,400,000	450,000	3,850,000

研究分野：数理統計学

科研費の分科・細目：統計科学

キーワード：多変量正規分布，高次元データ，分散共分散行列，統計的決定理論，縮小推定量，スタイン問題，ジョルダン代数，ウィシャート分布

1. 研究開始当初の背景

正値対称実行列の空間上に定義されるウィシャート分布は多変量分散分析などで基本的な役割を果たす。また、エルミート対称複素実行列の全体の空間上で定義される複素ウィシャート分布は、移動通信や SAR (synthetic aperture radar system) データの解析など科学技術分野で広く用いられて

いる。

従来の多変量解析（以後、古典的多変量解析とよぶ）では、個々の空間上の多変量モデルを個別に扱う傾向がややあった。

しかし、任意の対称錐（すなわち、自己双対で等質な開凸錐体で正値対称実行列やエルミート対称複素実行列をその例として含むもの）がジョルダン代数（すなわち、可換律

のほかにジョルダン積という特殊な結合律をみたす代数系)によって記述される事実を利用すれば、正値対称実行列の空間上の解析が任意の対称錐にも見通しよく拡張・適応できる。

このことは、多変量実正規分布と複素正規分布それぞれで行われてきた議論はいうまでもなく、ローレンツ錐やステイフェル多様体上の統計モデルまでの推測理論の議論が統一的な枠組みからできるであろうこと示唆する。これが、本研究にいたる動機であり、その可能性の中心であった。

2. 研究の目的

以下の項目が主な目的であった：

- (1) 対称錐上の一般化されたウィシャート分布の期待値母数（スケール行列）の推定問題について統計的決定理論から検討し、縮小推定法の構成とその最適性を調べること；
- (2) 対称錐上の一般化されたウィシャート分布の期待値母数（スケール行列）の検定問題における尤度比検定統計量等の漸近分布やその精度の向上を目指す近似方式を検討し、古典的多変量解析で知られている結果を統一的かつ体系的に拡張すること；
- (3) ウィシャート分布は自然母数指数分布族に含まれる。自然母数指数分布族の理論の観点から、対称錐上の新たな統計モデル（対称錐上の楕円分布族や指数 dispersion モデルなど）の構成し、その性質を調べること；
- (4) 標本数に比較してモデルの次元が非常に高い場合の推測理論を対称錐上の一般化されたウィシャート分布に対して展開すること；
- (5) 因果関係を記述するグラフィカルモデルとそれにおける手法を対称錐上の一般化されたウィシャート分布に対して構成し、それらの最適理論を調べること；
- (6) 対称錐上の一般化されたウィシャート分布の期待値母数（スケール行列）の推定問題を頑健性の観点から考え、対称錐上の統計モデルにおける頑健な手法を考案し、考案した推定量の漸近分布を検討すること；
- (7) ジョルダン代数を用いて、対称錐上の一般化されたウィシャート分布モデルを一般化したように、ステイフェル多様体上の統計モデルの統一的に記述と表現を検討し、その統一的かつ体系的な推測理論を確立すること；
- (8) 上記の(1)~(7)で得られた推測論における最適理論に関する結果を数値実験で検証すること。

3. 研究の方法

本研究は、

- (1) 推測統計理論の側面からの研究；
- (2) 表現論の側面からの研究；

- (3) 提案した新しい統計手法の数値的検討をする研究；

- (4) 考案された新たな統計手法の他分野への適用および応用の可能性の研究

にわかる。本研究は、数理統計学・数学・通信理論等の複数の分野にわたる学際的な性格と理論から応用までの幅広い目標を掲げているので、国内外の関連分野の研究者との研究連絡・研究討論・情報交換を活用しつつ研究を進めた。研究代表者および連携研究者は、セミナー等の開催により、情報交換と研究討論を繰り返しながら、各人の研究アイデアの本研究への融合を図った。さらに、参考となる学術論文・専門図書を購入手、既知の知識の整理と新しいアイデアの発見を試みた。

4. 研究成果

(1) ショルダン代数を利用した多変量統計モデルの体系的な研究の可能性を明らかにしつつ、対称錐体上の一般化されたウィシャート分布モデルの先行研究を踏まえ、対称錐体を記述するために重要な役割を果たすジョルダン代数についての基本的な事項について整理をした上で、対称錐体上の一般化されたウィシャート分布のスケール行列（期待値母数）の推定問題において、統計的決定理論の枠組みから新たな推定量を導出し、その最適性について調べた。この結果は、実ウィシャート分布のスケール行列の推定問題をスタイン損失（エントロピー損失とも呼ばれる）のもとで考えたときに、母数分散共分散行列の最尤推定量は非許容的であり、ミニマックス推定量でなく、定数リスクのミニマックス推定量によって一様に改良され、さらに、直交群に関して不変な推定量の族に対して、そのリスクの不偏推定量を導出することができ、これを用いることにより、定数リスクのミニマックス推定量も一様に改良できるという結果を対称錐上の一般化されたウィシャート分布のスケール行列の推定問題にたいして展開したことになる。この研究結果に関する論文は国外学術専門誌 (Journal of Multivariate Analysis) に掲載された。

(2) 対称錐体上のウィシャート分布の特別な例として、ローレンツ錐体上のウィシャート分布モデルのスケール行列に対する新たなミニマックス推定量を構築した結果を得た。ここで得られた結果は、これまで扱われていなかった統計モデルに対して統計的決定論の立場から議論をしたところに斬新さがある。この結果をまとめた論文は国外学術専門誌 (Journal of Statistical Studies) に掲載された。

(3) 多変量実正規分布の精度行列（分散共分散行列の逆行列）の推定問題を 2 乗損失のもとで考え、母数分散共分散行列に対して

提案された改良型推定量を修正したものが、精度行列の改良型推定量になっていることを示した。これらの結果に基づき判別係数に対する改良型推定量の族を提案し、そのリスクは通常の推定量のリスクを一様に改良していることを示した。さらに、数値実験に用いて通常の推定量に対する改良率を報告した。この結果は、国外学術専門誌 (Journal of Multivariate Analysis) に掲載された。

(4) エルミート対称行列の全体の空間上で定義される複素ウィシャート分布において、そのスケール行列の推定問題を考え、縮小推定量を構成する理論的な道具立てを調べた。ここで展開される議論は、上記の(1)で予想された結果をより個別の設定において、ややことなるアプローチを用いて議論を展開したものである。研究成果をまとめた論文は、国外学術専門誌 (Journal of Statistical Planning and Inference) に掲載された。

(5) 標本数に変数の次数より小さい場合の多変量正規分布 (実正規分布と複素正規分布) の分散共分散行列の推定問題は、応用において非常に重要であるにもかかわらず、近年まであまり研究がされていなかった。この場合には、標本分散共分散行列が特異 (正値対称ではなくランクが落ちる) となり、推定量は不安定になる。この点は従来の推定問題にはない難しさがある。さらに、標本数に変数の次数よりも大きな場合でも標本分散共分散行列の固有値は母数分散共分散行列の固有値に対してバイアス (小さい固有値の推定量は小さい母数固有値に対して小さい方にバイアスをもち、大きい固有値の推定量は大きい母数固有値に対して大きい方にバイアスをもち) をもち精度がわるいことが知られている。このような欠点を克服するために、ある種の不変損失関数のもとで改良型推定量を導出した。標本分散共分散行列のリスクと直交不変な推定量の族のリスクを比較するために、この族に対してリスクの不偏推定量を導出した。ここで用いられた手法 (理論的な考察のために道具) は、非特異なウィシャート行列に対して展開されていた eigenstructure に対する議論を特異ウィシャート行列に対して拡張したものである。さらに、数値実験により、改良型推定量を正定値にした修正推定量は、安定性と精度の観点から標本分散共分散行列よりもよいことを数値実験で確認した。この結果は、2008年度統計関連連合大会および研究集会で口頭発表し、論文としてまとめたものは現在国外学術専門誌において審査中 (リバイスを再投稿済み) である。

(6) 複素多変量正規分布の平均行列の推定問題を不変な 2 乗損失関数のもとで考え、ミニマックス推定量を構成する体系的なアプローチを与えた論文を準備中である。こ

で議論された問題が、複素多変量分散分析モデルや一般化複素多変量分散分析モデルの回帰係数行列の推定問題のプロットタイプになる。これらの問題を含めたいくつかの多変量モデルの推定問題に応用できるアプローチを与えていることがおおきな成果であり、非常に発展性のある結果である。ここで得られた研究結果をまとめた論文は、準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

(1) Konno, Y., Estimation of multivariate complex normal covariance under an invariant quadratic loss, *Communication in Statistics -- Theory and Method.* (掲載予定・査読有)

(2) Konno, Y., A class of orthogonally invariant Minimax estimators for normal covariance matrices parametrized by simple Jordan algebras of degree 2. *Journal of Statistical Studies*, vol. 26(2007), 67-75. (査読有)

(3) Konno, Y., Improving on the sample covariance matrix for a complex elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 137(2007), 2475-2486. (査読有)

(4) Konno, Y., Estimation of a normal covariance matrix parametrized irreducible symmetric cones under Stein's loss. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 98(2007), 295-316. (査読有)

(5) Tsukuma, H. and Konno, Y., On improved estimation of normal precision matrix and discriminate coefficients. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 97(2006), 1477-1500. (査読有)

[学会発表] (計 6 件)

(1) Konno, Y., Shrinkage estimators for covariance matrices in multivariate complex normal distribute, 研究集会「Recent Advances in Statistical

- Inference - in Honor of Professor Masafumi Akahira」(筑波大学大学会館, 2008年12月16日)
- (2) Konno, Y., 「Shrinkage estimators for large covariance matrices in multivariate normal distributions」, 2008年度統計関連学会連合大会(慶應大学理工学部, 2008年9月8日発表)
 - (3) Konno, Y., 「A Decision-Theoretic Approach to Estimation from Wishart Matrices on Symmetric Cones」統計数学セミナー(東大数理科学研究科棟122号室, 2007年12月5日)
 - (4) Konno, Y., 「条件付独立構造とウィシャート分布について」, 科研基盤(B)「生物情報を解明するための統計数学的基礎理論とその応用(研究代表者:赤平昌文(筑波大学))」によるシンポジウム(日本女子大新泉山館, 2007年09月18日--20日)
 - (5) Konno, Y., 「対称錐上のウィシャートモデルに対する推定問題」, 計算代数統計の展開(研究者代表:竹村彰通)RIMS研究集会(京都大学数理科学研究所, 2006年11月06日--10日)
 - (6) Konno, Y., 「Estimation of normal covariance matrices parametrized by irreducible symmetric cones」, 日本数学会2006年度年大会(中央大学理工学部, 2006年3月29日)

[その他]

ホームページ等

<http://mcm-www.jwu.ac.jp/~konno/resarch1.html>

<http://mp-w3math.jwu.ac.jp/~konno/resarch1.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野 良彦 (KONNO YOSHIHIKO)

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号: 00205577

(2) 連携研究者

津熊久幸 (TSUKUMA HISAYUKI)

東邦大学・医学部・講師

研究者番号: 50424685

(3) 研究協力者

江村剛志 (EMURA TAKESHI)

台湾交通大学・統計学科・研究員