様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月８日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2005～2008
課題番号：17530656
研究課題名（和文） CASを活用した中学校の代数カリキュラムと教授単元の開発に関する研究
研究課題名（英文） Research about Algebraic Curriculum and Teaching Unit making use of CAS in Secondary School Grade

研究代表者
両角 達男（MOROZUMI TATSUO）
上越教育大学・大学院学校教育研究科・准教授
研究者番号：500324322

研究成果の概要：
本研究では，CAS(Computer Algebra System)を活用した中学校の代数カリキュラムの考察，および教材や教授単元の開発を行うと共に，実践された教授単元より CAS を活用した代数学習を通して学習者に促されたことがらについての実証的な考察を行った。実践された教授単元は，自然数の素因数分解と整式の因数分解，数としての平方根の認識を深めることを意図した単元「平方根」などであり，生徒の代数学習の質的な深化がみられた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　　計
２００５年度	1,800,000	0	1,800,000
２００６年度	600,000	0	600,000
２００７年度	600,000	180,000	780,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
総　　計	3,500,000	330,000	3,830,000

研究分野：数学教育学
科研費の分科・細目：教育学・教科教育学
キーワード：CAS，代数的活動，代数カリキュラム，教授単元，認識，内省

１．研究開始当初の背景

文字式の学習の中で，文字式の意味や構造を洞察することは重要な役割を果たす。例えば，「ｎが任意の整数であるときに，n^5-nが 30 の倍数となること」や「ｙ＝ｂは指示する文脈によりｙ＝０ｘ＋ｂ（ｘ軸に平行な１直線），ｙ＝ｍ×０＋ｂ（ｙ切片としての１点)とも解釈できること」は，文字式の意味や構造の洞察によりとらえることができる。この文字式の意味や構造を洞察することについては，シンボルセンスを高める場を設けると共に，代数学習において CAS を効果的に活用することが有効であることが，Arcabi や Drivers らによる先行研究から指摘されている。また，Drivers が指摘する，学習の道具として CAS の可能性，「CAS，メンタルシェマ，範例」を３つの頂点とする学習過程への着目，CAS を活用した代数学習による垂直的数学化の段階の移行過程の分析に強い関心をもった。そこで，Drijvers らの先行研究からの知見を理論的なよりどころとしながら，CAS を活用した中学校から高校への代数カリキュラムや教授単元を探求していきた

いと考えた。

２．研究の目的

本研究の目的は，次の２点を考察することである。

(1)　CAS を活用した代数学習により学習者に促されることがらを先行研究をもとに考察すると共に，CAS を活用した代数的活動をとらえる枠組みとその事例を開発する。

(2)　CAS を活用した中学校の代数カリキュラムについての考察を進めながら，中学校から高校への接続を促す代数の教授単元を開発し，実践する。実践された教授単元の中で，学習者に促されたことがらについて，その学習過程の分析から実証的な考察を行う。

３．研究の方法

上記の研究の目的に向けて，次の３つの方法により考察を進める。

(1) CAS を活用した代数学習により学習者に促されることがらや可能性について，Drijvers と Kieran らによる継続的な共同研究や Stacy らの海外の代数領域の先行研究を分析し，理論的な考察を進める。また，T^3 Japan などにみられる国内の先進的な実践研究からの考察も行いながら，CAS を活用した代数的活動をとらえる枠組みづくりを行う。

(2) CAS の活用を前提とした海外の数学教科書の記述分析や教材解釈を行い，CAS を活用した中学校の代数カリキュラムの考察を行う。また，中学校から高校への接続を促す教授単元を CAS の活用を前提として開発する。

(3) 実践された教授単元（多項式の因数分解，平方根など）について，その学習過程を質的に分析し，CAS の活用により学習者に促されたことがらを解明する。

４．研究の成果

(1) CAS を活用した代数的活動をとらえる枠組みとその事例について

Kieran,Guzman（2005）は，生徒が CAS を活用しながら整数に関する性質を発見し，その性質の適用範囲や性質を成り立たせる論拠を探求する過程を分析している。その一例は「１から９までの自然数を用いた四則計算で，1000 までの自然数を５以下のステップで０にしてみよう」という問題についての生徒の学習過程の分析である。Five Steps to Zero と呼ばれるこの問題を生徒が解く中で，合成数であることを見抜く方法や倍数の工夫した見分け方，素因数分解に関する性質, 除数と余りの数との関係，整数を素因数分解した形から思考を進めることが促されたという。また，生徒が自分自身の学習過程をふりかえる活動が，さらなる整数の性質の発見や性質の論拠への探求に活かされていたという。この実践研究のよりどころとなるのは，Kieran が掲げる代数的活動の３つのタイプである。Kieran（2003,2004）は，学校代数での学習活動には「生成（generational）の活動，変形（transformational）の活動，内省（grobal-metalevel）の活動」の３つがあると指摘する。ここで，内省の活動には，代数を用いて問題解決をすることの必要感や大切さを味わう諸活動（モデリング，予測，証明など）が含まれるという。

CAS を活用した代数的活動をとらえる枠組みとして，Kieran の掲げる生成，変形，内省の３つの活動を基軸とした。また，中学校での授業の実際を想定し，静岡県版カリキュラム算数・数学科の理念から得られることがらを融合した。静岡県版カリキュラム算数・数学科では, 単元で考えること，単元全体で大切にしたいことを「核となることがら」として明確にすること，「核となることがら」を具体化した例を考えること，幾つかの具体例から改めて「核となることがら」を再検討し，単元レベルでの学習活動をよりよいものにすることが重視されている。「単元で考える，例を考える，例で考える，単元を改めて考える」ことによる数学学習が深まり，その循環によって学習者に「習得と整理，探求と発見」が促されることが意図される。

そこで，活動の特性としての「生成する活動，変形する活動，内省する活動」と，活動の様相としての「習得と整理，探求と発見」の２つの視点に着目し，CAS を活用した代数的活動の枠組みを作成した。

【CAS を活用した代数的活動の枠組み】

様相＼特性	生成	変形	内省
習得と整理	A	B	C
探求と発見	D	E	F

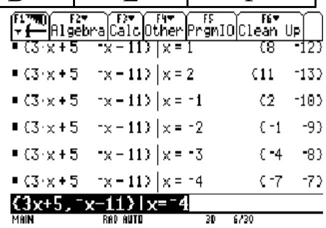

図１

例えば，上の図式のＡの例は，図１のように，１次方程式の解を見いだすために１次方程式の左辺，右辺の式の値を次々に求めながら，その解を帰納的に導いていく活動である。Drijvers（2003）によれば，数式処理電卓における「どの場所に何を代入するか」を表す「｜」の記号を用いた表現は，生徒の式の置換に関する概念の生成において重要な役割を果たすという。図１では，１次方程式３ｘ＋５＝－ｘ－ 11 の解を導

くために，この式の左辺，右辺について同じｘの値に対する式の値の比較を行い，その数値をみながらつりあう場所を探している。この活動を通して，等式を満たす値とはいかなることかなど，１次方程式やその解の意味を習得したり，等式の見方を整理することができる。

前頁の図式のＢの例は，図２のように等式の性質に着目して１次方程式を解く活動である。CASを活用して１次方程式を解くためには,「両辺に同じ操作を施す」という等式の性質をふんだんに使うことが要求される。（solve 機能を使わない場合） 紙と鉛筆による方法とCAS を用いた方法では「両辺に同じ操作を施す」ことの表現に文法面での顕著な違いがある。しかし，CAS による表現の意味を解釈することにより，１次方程式を式変形で解くためには,「等式の性質による式の同値変形を行っている」という論拠が明確になっていく。これは，式変形の活動の中での，等式の性質の意味と役割を習得し，逆算による算術的な方程式の解き方との異同を整理していく上で有効である。

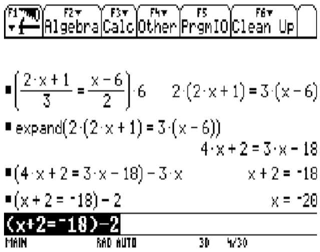

図２

前頁の図式の Ｃの例は，図３のように１次方程式で解ける年齢算の一般解をパラメータ表示した方程式への数値の代入を通して考察する活動である。Drijvers（2003）によれば，パラメータの意味を理解するためには，生徒がCAS で行った生徒自身の活動をふりかえり，その意味を解釈したり検討することが有効であるという。図３ではａ（13 ＋ｘ）＝45 ＋ｘの形の一次方程式で解くことができる年齢算について，CAS を用いて得られたデータをふりかえり，それらに共通する性質を整理することにより，一般解についての考察を深めることができる。

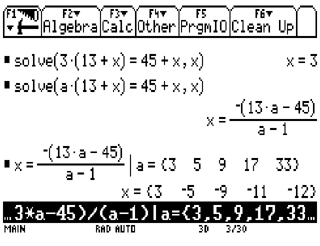

図３

前頁の図式のＦの例は図４のようにＱ［√２］の構造を洞察していく活動である。

(√2 −1)/(2√2 −3)

(√2 −2)/(3√2 −4)

(√2 −3)/(4√2 −5)

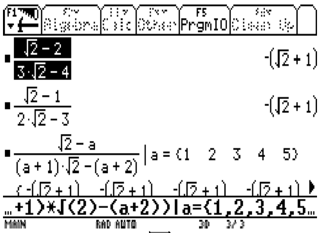

図４

などの規則性をもった数は，CAS の上でみな－(√２＋１）を表示する。帰納的に調べて得られるこの事実をふりかえることによりＱ［√２］の要素としてのａ＋ｂ√２の形の数の認識を促すことが期待できる。

このようにして，CAS を活用した代数的活動の枠組みに基づき，中学校から高校への代数学習に焦点をあてた事例づくりを行った。

(2) CAS を活用した中学校から高校への代数学習の接続を促す教授単元の開発とその実証的な考察

CAS を活用した代数学習の教授単元の１つは，類比的な推論を促しながら整数と整式の性質を探求していく学習活動である。具体的には，自然数のもつ性質を，自然数を素因数分解した形から探求していくことや，x^n-1 の形の式を因数分解して得られる性質を探求することである。後者の x^n-1 の因数分解に関する教授単元は，Kieran と Drijvers ら（2006）による，15 歳児を対象に行われた等号の相等関係の認識を深める学習活動，x^n-1 の因数分解に関する学習活動を参考にしている。Kieran らによる教授実験では，CAS による方法と紙と鉛筆による方法を比較し，その調和を図るという内省の活動が重視されている。その背景には，Kieran らが提唱する TTT 理論（問題（Task）－理論（Theory）－技術（Technique）を軸とする理論）がある。これは，授業で扱う問題が生徒の代数的活動を促し，CAS と紙と鉛筆による方法との比較や相互作用により，生徒の概念的知識や手続き的知識などの理論と技術が共に創発されていくという考えである。また，CAS と紙と鉛筆による方法の相互作用により，人工物としての CAS が生徒の思考を促し，進めるために必要不可欠な道具となるという学習過程も重視されている。Kieran らの x^n-1 の因数分解に関する教授実験では，因数分解をしたいくつかの式にみられる因数のもつ規則性の発見とその一般化，CAS と紙と鉛筆による方法で得られたことがらの調和と推測を通した x^n-1 の因数分解に関する性質の精緻化，因数分解について見いだした性質の証明が行われていた。

本研究における教授実験は，中学校から高校への代数学習の接続を促すという観点から，Kieran らの x^n-1 の因数分解に関する教授実験のうち，規則性の発見やその一般化，CAS と紙と鉛筆による方法の調和を重視した因数分解に関する性質の精緻化の過程を重視した学習活動で構成することとした。中学校の数学授業で実践された教授単元は，同じ数が連続してできる自然

数の性質を調べ，その性質を一般化させること，１が連続してできる自然数を素因数分解して得られる性質を探求すること，「２乗の差は和と差の積になる」ことをもとに紙と鉛筆による方法でx^3-1やx^4-1を因数分解した式を導いたり，それらの式の形をもとにx^7-1くらいまでの式を因数分解した式の形を予想すること，CAS を活用して$x^{14}-1$くらいまでの式の因数分解を行い，CAS と紙と鉛筆による方法との調和を図ること，CAS により得られたx^n-1を因数分解した式をふりかえりながら，規則性などの性質を導き，議論を重ね，さらに成り立ちそうな性質を洞察する，などの学習活動から成るものである。

x^n-1の因数分解に関する教授実験では，指数 n の値と因数やその個数との関係，因数そのものがもつ性質などに焦点をあてた性質が導かれた。例えば，指数 n が素数，偶数，奇数，ある数の累乗の場合での，因数の個数や因数の特徴を式の形から述べるものなどである。例えば，$x^{125}-1$のように指数 n が５の累乗のときに，それぞれの因数を形づくる多項式の指数が同じ数ずつ減少し，減少する数が５の倍数であることや，因数である多項式の形がよく似ていることなどが指摘されている。

また，この教授実験を通して，因数分解についての生徒の認識がいったんゆらぎ，他者との議論を通してそのゆらぎを自覚し，ゆらぎを超克していくこともみられた。この現象は，x^n-1の因数分解に関する教授実験の後に行った筆記調査および事後のインタビュー調査から明らかになっている。2007 年度に行った筆記調査では，選択肢からx^4-1を因数分解した式を選ぶ問題で，24%の生徒が$(x^2+1)(x^2-1)$，５%の生徒が$(x-1)(x^3+x^2+x+1)$，71%の生徒が$(x+1)(x-1)(x^2+1)$を選んでいる。$(x^2+1)(x^2-1)$を選んだ生徒があげた理由として「どれを選んでも展開していけばx^4-1になるけど，一番わかりやすくて短くしたものだから」や「因数分解として一番自然な形だから」という意見がある。いずれも，「２乗の差は和と差の積になる」という事実を生徒なりに一般化したものといえる。また，「これならx^4のように２乗する数ではなく，どんな数でも適応できるので」という理由で，$(x-1)(x^3+x^2+x+1)$を選んでいた。その後のインタビュー調査の中で，他者との議論を通して$(x^2+1)(x^2-1)$と答えた生徒が，$(x+1)(x-1)(x^2+1)$に変容した状態がみられた。そこで，2008 年度においても，同じ趣旨の教授実験を再度行い，教授実験の中で生徒の因数分解に対する認識がどのように変容していくかをさらに分析していくことにした。2008 年の教授実験では，一斉授業の中で「因数分解とは何か」の定義を一層明示的に扱い，また繰り返し「因数分解の定義に立ち返って，自分の行った因数分解が正しいかどうかをふりかえること」が促された。また，因数分解に対する生徒の認識を詳しくみるために，一連の教授実験の後に２人１組でのインタビュー調査を行った。インタビュー調査は，x^4-1を因数分解した式や，$x^{12}-1$を因数分解した式を洞察することなどに焦点をあてて行われた。その結果，生徒は一斉授業の中で因数分解の定義の共有がなされても，因数分解について多様な意味づけをしていること，因数分解の定義が漠たる状態であるとき，他者の考えがx^4-1の因数分解に対する見方をゆさぶること，生徒にとってインパクトがあったり美しさを感じたx^n-1の因数分解の性質を生徒なりに一般化して適用する傾向があること，因数分解とは何かの議論が進むとx^4-1と同値な式への見方が深まること，因数分解をする行為の意味を具体例でふりかえることが因数分解の認識の深化のために重要な役目を果たすことがみられた。例えば，「２乗の差は和と差の積になる」という見方を強く抱いている２人の生徒が，x^4-1について$(x^2+1)(x^2-1)$から$(x+1)(x-1)(x^2+1)$に変容するまでには 54 分間の２人での議論を重ねて，ようやく「やれるところまでやるのが因数分解」という２人なりの結論を出している。x^2-1など２次式の多項式の因数分解ではそれほど問題にならなかった因数分解のとらえが，x^3-1やx^4-1などやや高次の多項式を因数分解する場面に遭遇することで大きくゆらいだと考えられる。また，生徒が感じた式の形でのインパクトが，因数分解とは何かの認識を上回ったともいえる。

x^4-1の因数分解についてのこうした生徒の動きは，因数分解の学習における中学校から高等学校への接続のあり方にいくつかの示唆をあたえる。さらに，あることがらを学習する上で，そのことがらを含むやや広い内容を学習することの必要性も示唆される。例えば，２次式の多項式の因数分解を学ぶ上で，CAS を活用して関連する３次式や４次式の因数分解を探求する学習活動の有効性である。その一方，やや広い内容の学習が，主たる学習内容の認識を深める上での弊害となる可能性もある。CAS を活用した代数学習の可能性と課題を実感させる，生徒の学習状況といえる。

CAS を活用した代数学習の教授単元の

いま１つは，有理数からの接近や近似の過程を重視し，数としての平方根の認識を深める単元「平方根」の授業である。この教授実験では，√ 50 について様々な方法で近似することや，CAS を活用した二分法による方法で√ 50 を有理数から接近していく活動などが行われている。また，分母に平方根を含む数と有理数を比較し，その計算の異同を議論することから，数としての平方根の認識を深める学習が営まれている。この教授実験の様相については，現在そのデータを主に質的な方法により分析を重ねているところである。その分析結果は，2009 年度の学会で発表する予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

① 両角達男，横田川文浩「因数分解に関する生徒の認識のゆらぎと深化－ CAS を活用した代数的活動を通して－」，日本数学教育学会第 41 回数学教育論文発表会論文集，pp.363-368，2008，査読有

② 両角達男「語りきれないことがらの存在を意識し，そのことがらに迫る」，教育科学，第 611 号，pp.92-97，2008，査読無

③ 両角達男「CAS を活用した $x^n - 1$ の因数分解に関する代数的活動」，静岡大学教育学部研究報告教科教育学篇，第 39 号，pp.69-84，2008，査読有 http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/2398

④ 両角達男，横田川文浩「因数分解の学習の質的深化を促す代数的活動－ CAS と紙と鉛筆による方法との調和に着目して－」，日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集，pp.337-342，2007，査読有

⑤ 両角達男「CAS を活用した代数学習における内省の活動（Ⅰ）」，静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要，第 13 号，pp.9-20，2007，査読有 http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/983

⑥ 両角達男「活動をふりかえり，立体図形に対する見方を深める」，教育科学数学教育，第 598 号，pp.85-89，2007，査読無

⑦ 両角達男「小中高連携の視点を重視した数学授業の実践　－ふりかえる活動を通して－」，日本数学教育学会誌，第 88 巻，pp.41-48，2006，査読有

⑧ 両角達男「学習の質的深化を促す代数的活動に関する研究」，日本数学教育学会第 39 回数学教育論文発表会論文集，pp.33-336，2006，査読有

⑨ 両角達男「学校代数における CAS を活用した代数的活動　－代数的活動をとらえる枠組みの構築に向けて－」，静岡大学教育学部研究報告教科教育学篇，第 37 号，pp.29-47，2006，査読有 http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/977

⑩ 両角達男，清澤毅光，伊藤和弘，伊藤藍，松原康晃「CAS を活用した協働的な選択数学の授業実践」，静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要，第 12 号，pp.15-30，2006，査読有

⑪ 両角達男「CAS を活用した代数的活動に関する基礎的研究」，日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会論文集，pp.223-228，2005，査読有

〔学会発表〕（計４件）

① 両角達男，横田川文浩「因数分解に関する生徒の認識のゆらぎと深化－ CAS を活用した代数的活動を通して－」，日本数学教育学会第 41 回数学教育論文発表会，2008.11.2，筑波大学

② 両角達男，横田川文浩「因数分解の学習の質的深化を促す代数的活動－ CAS と紙と鉛筆による方法との調和に着目して－」，日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会，2007.11.3，東京理科大学

③ 両角達男「学習の質的深化を促す代数的活動に関する研究」，日本数学教育学会第 39 回数学教育論文発表会，2006.10.7，広島大学

④ 両角達男「CAS を活用した代数的活動に関する基礎的研究」，日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会，2005.10.29，山梨大学

６．研究組織

研究代表者

両角　達男（MOROZUMI TATSUO）

上越教育大学・大学院学校教育研究科・准教授

研究者番号：503234322