

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2005～2008

課題番号：17540035

研究課題名（和文）射影多様体の Castelnuovo-Mumford 量についての研究

研究課題名（英文）Castelnuovo-Mumford regularity for projective varieties

研究代表者

宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：90229831

研究成果の概要：射影空間内において有限個の斉次多項式の零点として定義された射影多様体の定義イデアルの次数、極小自由分解の複雑さを表す重要な不変量として、Castelnuovo-Mumford 量がある。Castelnuovo-Mumford 量の上限を射影多様体の次数、余次元などで記述する問題はこの分野の重要なテーマであり、いくつかの上限が知られている。本研究において、射影曲線の Castelnuovo-Mumford 量が Castelnuovo 型の上限、次の上限を満たすときに、最小次数の射影曲面もしくは正規 Del Pezzo 曲面の因子となることを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	900,000	0	900,000
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	480,000	3,880,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何・可換環論・射影多様体・多項式イデアル・極小自由分解・シジジー・Castelnuovo・Mumford

1. 研究開始当初の背景

(1) 多項式イデアルの Castelnuovo-Mumford 量の研究は、2000 年以降、世界的に論文が急増している。計算機の発達、グレブナー基底の理論の発展によって、従来、實際上計算不可能であった多項式イデアルの極小自由分解が計算できるようになったことにも起因していると思われる。射影多様体の定義式の研究という古典的な問題が現代的な手法により研究されるようになってきている。具体的な射影多様体

論や単項式イデアル、トーリックイデアルの具体例の研究にも影響を及ぼしている。

(2) 射影多様体の Castelnuovo-Mumford 量の上限を制御する問題は、Eisenbud-Goto 予想などの重要な問題が未だに解決されずにいる。しかしながら、射影曲線の場合の研究の中に、現代的なコホモロジーの手法を取り入れた Gruson-Lazarsfeld-Peskine の方法があり、これが射影曲線の Secant Line の記述に役立つことがわ

かってきた。また、Sijong Kwak による 3 次元での予想の部分的解決の中に、Mather 理論が使われており、この理論を代数的に構築していくなどのいくつかの課題があることがわかってきた。射影曲線などの場合の Eisenbud-Goto 型の Castelnuovo-Mumford 量の上限について、等号を満たす例、等号の次を満たす例などの研究も進められている。

- (3) 射影多様体の Castelnuovo-Mumford 量に対する Castelnuovo 型の上限については、研究代表者である宮崎を始め、Hoa, Nagel, Schenzel, Vogel などにより、中間次元のコホモロジーの消滅を標準加群の不変量で記述することを用いて進められてきた。最近では、その上限を満たす多様体が、最小次数の射影多様体の因子になるということがわかってきた。

2. 研究の目的

射影空間内において、有限個の斉次多項式の零点として定義された多様体の代数的性質を調べるのが研究のテーマである。そのように定義された射影多様体の定義イデアルの次数、極小自由分解、Castelnuovo-Mumford 量を代数的不変量で記述することが目標である。その中で Castelnuovo-Mumford 量の上限を考察する。射影多様体の座標環の環論的性質が Cohen-Macaulay や Buchsbaum の場合および射影曲線の場合には、Castelnuovo-Mumford 量の上限が、多様体の次数、余次元を用いた (射影曲線論で現れる) Castelnuovo 型の不等式によって記述される。この証明には、射影曲線の超平面切断による点集合が一様性を持つという原理 (UPP) が鍵の一つになる。さらに、コホモロジーの標準的な手法や Buchsbaum 環の理論を用いると Castelnuovo 型の上限が得られる。本研究の目的は、Castelnuovo-Mumford 量の Castelnuovo 型の上限の式を、一般次元の射影多様体に拡張することである。さらに、上限の式が与えられたカテゴリー内での射影多様体について、その上限を満たす多様体の分類を考えることである。それを発展させて、Castelnuovo-Mumford 量の上限への近さと射影多様体の分類との関係を調べる。

この研究では、基礎体の標数について、0 および正の両方について考察する。基礎体の標数が 0 の場合には、Huneke-Ulrich によるソークル補題が基本となる。この補題は、適当な条件下での定義方程式の持ち上げを保証するもので、超平面切断によって次元の低い多様体に帰着させるという射影多様体を考える際の標準的な方法に有効である。この強力な補題の正標数化もしくは対応する別の方法を確立することが、基礎体の標数によらない問題全般の解決に寄与することにな

る。古典的 Castelnuovo の方法についても標数が正の場合に必要な綿密な理論を押し進めることも目的の一つと考えている。射影多様体の Castelnuovo-Mumford 量を研究の中心のテーマとし、Castelnuovo 型の不等式の研究に絞りを絞り、Eisenbud-Goto 予想型の不等式の周辺の問題、射影曲線での具体的な Secant Line の記述やトーリック多様体の場合の Castelnuovo-Mumford 量などの問題にも、連携研究者を通じて、研究を進展させるようにすることが目的である。

3. 研究の方法

射影多様体の極小自由分解を記述することに焦点を当てて研究を進めた。特に、Castelnuovo-Mumford 量について射影多様体の他の不変量との関係を中心に研究を進めた。この方面の研究について、研究分担者・連携研究者が協力して、研究打ち合わせ、セミナーなどを行った。寺井は、組み合わせ可換環論の専門家であり、Buchsbaum Stanley-Reisner 環の極小自由分解についての研究を進めた。前田は、代数的ベクトル束、不変式論が専門であり、このテーマとの関連が深い。尾崎は低余次元多様体の極小自由分解を深く研究しており、Basic 列の計算により、Castelnuovo-Mumford 量についての結果を得ている。野間は、射影曲線についての Castelnuovo-Mumford 量とその幾何学的性質について深い結果を得ており、研究打ち合わせを密に行い、Castelnuovo 型の不等式についてもいくつかの助言をいただいた。尾形は、トーリック多様体の定義イデアルを研究しており、現代的な手法を用いる点で多くの参考になる結果を披露してもらった。研究期間中、できる限りの国際研究集会に参加し、研究打ち合わせなどを行った。2006 年 5 月には CIRM (Luminy, フランス) で Castelnuovo-Mumford 量についての研究集会があり、研究発表を行った。このときの主催者の Marc Chardin (パリ第 6 大学) は 2009 年秋に招聘する予定で進めている。2007 年 6 月には、ドイツの Max Planck 研究所とライプチヒ大学において、Castelnuovo-Mumford 量についての研究集会があり、ここでも研究発表を行った。また、研究分担者、連携研究者を中心に、適時、研究集会を行った。2005 年 2 月に琉球大学理学部にて「Castelnuovo-Mumford 量とその周辺の話題」を開催、2007 年 2 月に佐賀大学理工学部において「Castelnuovo-Mumford 量についての研究会」を開催、2008 年 2 月に九州大学大学院数理学研究院にて「代数幾何学 in 九州」を開催した。また、2008 年 11 月には、例年行われている可換環論シンポジウム (30 回目) を寺井および高木俊輔 (九大) とともに国民宿舎虹の松原ホテル (佐賀県唐津市) において主催した。外国

人招聘者 3 名も含めて参加者は約 70 名であった。招聘者のうち、Sijong Kwak (KAIST, 韓国) は研究集会後、佐賀大学に招聘し、寺井、野間とともに Castelnuovo-Mumford 量についての研究会を行った。

4. 研究成果

射影多様体の Castelnuovo-Mumford 量について、Castelnuovo 型の上限に関するいくつかの結果を得た。射影曲線の場合および Buchsbaum 多様体の場合の Castelnuovo 型の上限については、等号が成り立つ場合も存在する不等式が得られている。この等号を満たす場合の分類を研究した。

まず、基礎体の標数が 0 の場合には、射影曲線について超平面切断の一意性が成り立つが、基礎体の標数が正の場合には、成立するとは限らない。つまり、射影曲線を超平面で切断したときの交点の集合に一意性があるとは限らない。しかしながら、Rathmann の理論により、そこに出現するモノドロミー群が射影曲線の切断ということによって、ある種の制限を受ける。このことを用いて、射影曲線の Castelnuovo-Mumford 量が大きくはならないという結果を生み出すということが示すことができた。古典的 Castelnuovo の方法というやり方を適用した。この理論を推し進める際に生じる標数が 0 から正への難しさには、射影曲線の超平面切断の一意性原理が使えないことと、ソークル補題が使えないことの 2 つがあった。前者については解決できた。これは、論文[6]の中で綿密な議論がされている。

次に、射影曲線に的を絞る。Hartshorne-Rao 加群が中間次元のコホモロジーを表す不変量であり、埋め込みを考えた射影曲線の分類にとって、重要な加群である。この加群の零化についての不変量を用いて、射影曲線の Castelnuovo-Mumford 量の Castelnuovo 型の上限を考察する。以前に発表した宮崎の結果によって、射影曲線の次数が十分に大きい場合は、上限を満たす射影曲線は、最小次数の曲面の因子となることがわかっている。最小次数の曲面は、2 次超曲面、ペロネーゼ曲面、有理正規曲面のいずれかになることはよく知られている。そのピカル群も計算可能なので、結果として、上限を満たす射影曲線がきちんと記述できることがわかる。さらに発展させて、上限の次の射影曲線について研究を進めた。射影曲線の超平面切断で現れる点集合を考察して、Castelnuovo-Mumford 量が上限の次の値をとる場合は、その点集合が有理正規曲線もしくは楕円正規曲線に含まれることを示す。これは、Eisenbud-Harris の Castelnuovo 理論の定理を用いる。大雑把にいうと、その点集合がヒルベルト関数の振る舞いに応じて、適当な次元の有理線織多

様体に含まれることがわかる。ヒルベルト関数は Castelnuovo-Mumford 量に影響を与えるので、点集合を含む有理線織多様体の因子から辿っていき、その点集合を因子とする射影曲線を見つける。そこで、ソークル補題を用いて、最初に与えられた射影曲線を含む性質のよい曲面を見つけるという手順である。次数が十分に大きい射影曲線が上限の次の Castelnuovo-Mumford 量をもつときは、最小次数の曲面もしくは正規 Del Pezzo 曲面の因子になるということが得られた。さらに、そのような射影曲線も存在することが示された。この結果は、論文[4]で発表した。基礎体の標数が正の場合の結果も含めて、いくつかの国際研究集会などで紹介した。

さらに、Buchsbaum 多様体に対して、その Castelnuovo-Mumford 量の Castelnuovo 型の上限について考察した。これは、柳川、Nagel によって、Castelnuovo-Mumford 量の上限を満たす Buchsbaum 多様体は、その次数が十分大きい場合は、有理線織多様体の因子になるという結果に対して、射影曲線の場合の手法を応用して研究した。Buchsbaum 多様体で次数が十分大きい場合、その射影多様体の Castelnuovo-Mumford 量が上限の次の値になるとき、最小次数の射影多様体もしくは正規 Del Pezzo 多様体の因子となることが示された。この結果は論文を準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

1. Atsushi Noma, Rational curves of Castelnuovo-Mumford regularity $d - r + 1$, J. Algebra, 321, 2445 - 2460, 2009, 査読有.
2. Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida, A note on Cohen-Macaulayness of Stanley-Reisner rings with Serre's condition S_2 , Comm. Algebra, 36, 464 - 477, 2008, 査読有.
3. Takashi Maeda, A partial order on Littlewood-Richardson tableaux, J. Algebra, 319, 3621 - 3652, 2008, 査読有.
4. Chikashi Miyazaki, Projective curves with next to sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, J. Algebra, 315, 279 - 285, 2007, 査読有.
5. Naoki Terai, Alexander duality in Stanley-Reisner rings, Affine algebraic geometry, 449 - 462, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.
6. Chikashi Miyazaki, Castelnuovo-Mumford regularity and classical

- method of Castelnuovo, Kodai Math. J., 29, 237 - 247, 2006, 査読有.
7. Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida, Buchsbaum Stanley-Reisner rings and Cohen-Macaulay covers, Comm. Algebra, 34, 2673 - 2681, 2006, 査読有.
 8. Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida, Stanley-Reisner rings with large multiplicities are Cohen-Macaulay, J. Algebra, 301, 493 - 508, 2006, 査読有.
 9. Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida, Buchsbaum Stanley-Reisner rings with minimal multiplicity, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 55 - 65, 2006, 査読有.
 10. Shoetsu Ogata, On higher syzygies of projective toric varieties, Math. J. Okayama Univ., 48, 47 - 55, 2006, 査読有.
 11. Amram Meirav and Shoetsu Ogata, Degenerations and fundamental groups related to some special toric varieties, Michigan Math. J., 54, 587 - 610, 2006, 査読有.
 12. Atsushi Noma, Very ample line bundles on regular surfaces obtained by projection, J. Algebra 306, 645 - 654, 2006, 査読有.
 13. Chikashi Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for divisors on rational normal scrolls, Collect. Math., 56, 97 - 102, 2005, 査読有.
 14. Juergen Herzog, Yukihide Takayama, Naoki Terai, On the radical of a monomial ideal, Arch. Math., 85, 397 - 408, 2005, 査読有.
 15. Mutsumi Amasaki, Maximal Buchsbaum modules over Gorenstein local rings, J. Algebra, 287, 402 - 416, 2005, 査読有.
 16. Shoetsu Ogata, k-normality of weighted projective spaces, Kodai Math. J. 28, 519 - 524, 2005, 査読有.
 17. Atsushi Noma, Multisecant lines to projective varieties, Projective varieties with unexpected properties, 349 - 359, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2005, 査読有.

[学会発表] (計 6 件)

1. 宮崎 誓, 射影曲線・多項式イデアルの自由分解、Castelnuovo-Mumford 量、日本数学会九州支部例会 特別講演、2008 年 2 月、琉球大学.
2. Chikashi Miyazaki, A Conjecture on the Castelnuovo-Mumford regularity and Castelnuovo-type bound, Conference on Castelnuovo-Mumford regularity and

applications, 2007 年 6 月, Max Planck Institute and University of Leipzig (Germany).

3. Chikashi Miyazaki, Castelnuovo-Mumford regularity for projective curves on a del Pezzo surface, Conference on Commutative Algebra dedicated to the memory of Wolfgang Vogel, 2006 年 11 月, Eisenach (Germany).
4. 宮崎 誓, Castelnuovo-Mumford regularity for projective curve on a del Pezzo surface, 第 28 回可換環論シンポジウム, 2006 年 11 月, ウェルサンピア多摩.
5. Chikashi Miyazaki, Extremal bounds for Castelnuovo-Mumford regularity for projective curves, Conference on Castelnuovo-Mumford regularity and related topics, 2006 年 5 月, Centre International de Recontres Mathematiques (Luminy, France).
6. 宮崎 誓, Castelnuovo-Mumford regularity for projective varieties, I, II, 第 3 回代数曲線論シンポジウム, 2005 年 12 月、中央大学理工学部.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号: 90229831

(2) 研究分担者

寺井 直樹 (TERAI NAOKI)

佐賀大学・文化教育学部・准教授

研究者番号: 90259862

(3) 連携研究者

前田 高士 (MAEDA TAKASHI)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号: 30229306

尼崎 睦実 (AMASAKI MUTSUMI)

広島大学・大学院教育学研究科・准教授

研究者番号: 10243536

尾形 庄悦 (OGATA SHOETSU)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 90177113

野間 淳 (NOMA ATSUSHI)

横浜国立大学・教育人間科学部・准教授

研究者番号: 90262401