

平成 21 年 5 月 28 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005～2008

課題番号：17540036

研究課題名 (和文) 多元環の導来圏とホール代数によるリー代数の実現

研究課題名 (英文) Derived categories of algebras and realization of Lie algebras via Hall algebras

研究代表者

浅芝 秀人 (ASASHIBA HIDETO)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：70175165

研究成果の概要：

可換環 k 上の線型圏に関する，群の自由作用を仮定しない，一般的な被覆理論を作り，導来同値のための被覆理論を精密化した．その応用として，2つの圏 R, S に群 G が作用するとき， R に対する G 安定な傾部分圏 E が存在して， E と S の間に弱 G 同変な圏同値があれば， R と S は導来同値になることを証明した．さらにこの被覆理論を深化させ Cohen-Montgomery 双対性の圏論の一般化を行った．また，domestic 標準多元環による単純リー代数の実現を精密化し，論文の初版の誤りを根本的に正して実現を完成させた．

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	900,000	0	900,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,300,000	480,000	3,780,000

研究分野：代数学、多元環の表現論

科研費の分科・細目：(分科) 数学 (細目) 代数学

キーワード：多元環，導来圏，ホール代数，被覆

1. 研究開始当初の背景

有限表現型の自己入射多元環のクラスと，樹木型遺伝多元環に導来同値な多元環の歪多重拡大として得られる自己入射多元環のクラスの導来同値分類が完成していた．そのとき用いていた導来同値のための被覆理論では，考える圏 R の対象がすべて互いに非同型で自己準同型間が局所環でなければならず， R への群 G の作用，およびその作用から導かれる有限生成射影 R 加群の有界ホモトピー圏 (の同型類) への G の作用が，ともに自由

であることが必要とされていた．これは応用上障害となっていた．また，domestic 標準多元環を用いて単純リー代数の実現を行っていた．(後にその論文の初版に誤りが見つかった.)

2. 研究の目的

(1) 代数的閉体上の大域次元有限の多元環から，その反復圏の巡回自己同型群による軌道圏の形で得られる，自己入射代数のクラスを，導来同値のもとで分類しその不変量を明ら

かにすること.

(2) 有限体上の有限次元結合代数 A の整ホール代数から構成される複素組成退化リー代数の剰余代数の形で単純リー代数, アフィン・リー代数を実現すること. また, それらの包絡代数およびその量子化を, リンゲル・ホール代数をもちいて実現することを目指す. さらに, これらが A の導来同値のもとでの不変量であるかどうか調べる.

3. 研究の方法

(1) 大域次元有限の多元環 A, B による反復圏の軌道圏として表される多元環 R, S に対して, それらが導来同値であることを, 導来同値のための被覆理論を用いて A, B の導来同値から導く, という方法を用いる. 大域次元有限の多元環として, 樹木遺伝代数に導来同値な代数をとり, 反復圏の巡回自己同型群の生成元として, 一般の rigid 自己同型と中山自己同型の冪の積になっているものを考え, このクラスを導来同値のもとで分類する. できれば中山自己同型の冪根を生成元とする場合についても分類する.

(2) domestic 標準多元環による単純リー代数の実現の議論の精密化を行い, そのホール代数および組成部分代数が, 考えているリー代数の普遍包絡代数になるための条件を調べる. また, 多元環からホール代数を用いて構成されたリー代数が, 多元環の導来同値のもとでの不変量となっているかどうかを調べるために, 有界導来圏のシフトによる軌道圏から構成したリー代数と, 多元環からホール代数を用いて普通に構成されるリー代数との関係を調べる.

4. 研究成果

(1) 可換環 k 上の線型圏に関する, 群の自由作用を仮定しない, 一般的な圏の被覆理論を作り, 導来同値のための被覆理論を精密化した. これにより, これまで使用範囲の限られていた圏の被覆理論を幅広く使えるようになった. 応用として, 2つの圏 R, S に群 G が作用するとき, R に対する G 安定な傾部分圏 E が存在して, E と S の間に弱 G 同変な圏同値があれば, R と S は導来同値になることを証明した. これは今後, 導来同値分類を遂行するためのより強力な道具として用いることになる. さらに, 実際に応用するために, 軌道圏をクイバーと関係式で計算する方法を与えた. また, 軌道圏をとる操作と, スマッシュ積をとる操作を圏からなる圏の間の

弱圏同値に拡張した. これは, Cohen-Montgomery 双対性の圏論的一般化を与える. 1つの応用として, 圏の自己同値で生成される巡回群による軌道圏の構成を, 余極限軌道圏の構成によって正当化した. これは直接にクラスター圏の構成に適用される. さらに, 被覆する圏と被覆される圏の加群圏を互いに他で記述した. これら双対性と加群圏の記述の結果には従来, 群の自由作用の仮定が必要とされていたが, 本研究ではこの確かめにくい仮定を取り除いた. 上の双対性の結果は今後さらに 2-圏の同値にまで拡張され, より広い応用を持つものと期待される.

(2) domestic 標準多元環による単純リー代数の実現の議論を精密化し, ガブリエル・ロイター部分加群の概念を用いて, 研究代表者による論文の初版の誤りを根本的に正し, 実現を完成させた. ガブリエル・ロイター部分加群を用いる方法は独自のものであり, この概念のより広い応用が期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

(1) 浅芝秀人, Covering functors, skew group categories and derived equivalences, 第 11 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集 (2009) (掲載予定), 査読無

(2) 浅芝秀人, Domestic canonical algebras and simple Lie algebras, Math. Z. 259 (2008), 713—754, 査読有

(3) 兼田正治, Kapranov's tilting sheaf on the Grassmannian revisited, 第 10 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集 (2008), 188-197, 査読無

(4) 兼田正治, Kapranov's tilting sheaf on the Grassmannian in positive characteristic, Alg. Repr. Th. 11 (2008), 347-354, 査読有

(5) 河田成人, Erratum to 'On Heller lattices over ramified extended orders', J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), 1849-1851, 査読有

(6) 兼田正治, Ye, J., Equivariant localization of \mathbb{D} -modules on the flag variety of the symplectic group of degree 4, J. Algebra 309 (2007), 236-281, 査読有

(7) 河田成人, 群環の Heller 格子について, 数理解析研究所講究録 1564 (2007), 70—75, 査読無

(8) 兼田正治, \mathbb{D} -modules and tilting sheaves, in Proc. Conf. on Groups and Lie Algebras, ed. Shinoda K., 上智

大学数学講究録 46 (2006) 25-29、査読無
 (9) Hashimoto Y., 兼田正治, Rumynin, D.,
 On localization of \overline{D} -modules, in
 "Representations of Algebraic Groups,
 Quantum Groups, and Lie Algebras," Contemp.
 Math. 413 (2006), 43-62、査読有
 (10) 河田成人、On Auslander-Reiten
 components and Heller lattices for
 integral group rings, Algebr. Represent.
 Theory 9 (2006), 513-524、査読有
 (11) 浅芝秀人、Realization of general and
 special linear algebras via Hall algebras,
 Fields Institute Communications, 45(2005), 9-16、査読有
 (12) 河田成人、On Heller lattices over
 ramified extended orders, J. Pure Appl.
 Algebra 202 (2005), 55-71、査読有

[学会発表] (計 28 件)

(1) 浅芝秀人、Covering theory of
 categories without free actions and a
 categorical generalization of
 Cohen-Montgomery duality, 大阪市立大学代
 数学セミナー, 2009-03-16, 大阪市立大学
 (2) 浅芝秀人、自由作用を仮定しない圏の被
 覆理論と導来同値, 第 14 回代数学若手研究
 会特別講演/信州大学理学部談話会,
 2009-03-04、信州大学
 (3) 浅芝秀人、Covering theory of categories
 without free action and colimit orbit
 categories, Representatn Theory Day,
 2009-02-12, University of Paderborn,
 Germany
 (4) 浅芝秀人、Cluster categories are not
 orbit categories, 静岡代数学セミナー,
 2008-12-05、静岡大学
 (5) 浅芝秀人、Skew monoid categories and
 derived equivalences, International
 Conference on Representations of Algebras
 XIII, 2008-08-08, Sao Paulo, Brazil
 (6) 浅芝秀人、Covering functors, skew group
 categories and derived equivalences, 第
 11 回代数群と量子群の表現論研究集会,
 2008-05-26、岡山大学
 (7) 浅芝秀人、Skew group categories and
 derived equivalences, Seminar on
 Representation Theory of Algebras,
 2008-02-12, University of Bielefeld,
 Germany
 (8) 兼田正治、On the structure of
 parabolic Humphreys-Verma modules, 組
 合せの表現論の拡がり, 2007-10-25, 京都大学
 数理解析研究所
 (9) 浅芝秀人、Covering functors, orbit
 categories and derived equivalences,
 Seminar on Representation Theory of
 Algebras, 2007-08-31, University of

Bielefeld, Germany.

(10) 浅芝秀人、Root spaces of simple Lie
 algebras realized by Hall algebras of
 domestic canonical algebras, Seminar on
 Representation Theory of Algebras,
 2007-08-31, University of Bielefeld,
 Germany
 (11) 浅芝秀人、Covering functors, orbit
 categories and derived equivalences,
 International Conference on
 Representations of Algebras, 2007-08-23,
 Nicolaus Copernicus University, Poland
 (12) 河田成人、Heller lattices and
 Auslander-Reiten quivers for integral
 group rings, XII International Conference
 on Representations of Algebras and
 Workshop (15-24 August 2007), 2007-08-23,
 Nicolaus Copernicus University, Torun,
 Poland
 (13) Hashimoto Y., 兼田正治, Beilinson's
 lemma on the projective spaces revisited,
 Quivers and Representations II,
 2007-08-03, 大阪市立大学
 (14) 浅芝秀人、Root spaces of simple Lie
 algebras realized by Hall algebras of
 domestic canonical algebras,
 Representation of finite dimensional
 algebras and Lie Theory, 2007-06-18, 京
 都大学数理解析研究所
 (15) 兼田正治、Kapranov's tilting sheaf on
 5th Grassmannian revisited, 第 10 回代数
 群と量子群の表現論研究集会, 2007-06-02,
 上智大学軽井沢セミナーハウス
 (16) 浅芝秀人、Covering functors, orbit
 categories and derived equivalences,
 研究集会「原始形式の圏論的構成 II」
 2006-12-19, 京都大学数理解析研究所
 (16) 河田成人、群環の Heller 格子について,
 京都大学数理解析研究所研究集会「群論とそ
 の周辺」, 2006-12-19, 京大会館
 (17) 浅芝秀人、Covering functors and orbit
 categories, 名古屋大学セミナー,,
 2006-10-21, 名古屋大学大学院多元数理科
 科学研究科
 (18) 浅芝秀人、Cyclic quiver と Dynkin graph
 から眺めた多元環の表現論における 2 つの
 流れ (導来同値とホール代数), 日本数学会
 秋期総合分科会特別講演, 2006-09-19, 大阪
 市立大学
 (19) 浅芝秀人、Reminder of model categories,
 名古屋大学セミナー, 2006-07-25, 名古屋大
 学大学院多元数理科学研究科
 (20) 浅芝秀人、DG algebras and a Morita
 theorem of Rickard, 名古屋大学セミナー,
 2006-07-24, 名古屋大学大学院多元数理科
 科学研究科
 (21) 浅芝秀人, Reminder of model

categories, A_∞ 圏に関する研究集会, 2006-03-28, ドイツ・ローテンベルグ, ミュンスター大学

(22) 浅芝秀人, Realization of simple Lie algebras via Hall algebras of domestic canonical algebras, Seminar of Representation Theory, 2006-03-23, University of Paderborn, Germany

(23) 浅芝秀人, Realization of simple Lie algebras via Hall algebras of domestic canonical algebras, 多元環の表現論国際会議, 2006-01-26, イタリア・トリエステ, 理論物理学国際センター

(24) 浅芝秀人, Domestic canonical algebras and simple Lie algebras, 原始形式の圏論的構成, 京都大学数理解析研究所, 2005-12-08

(25) 浅芝秀人, DG algebras and a Morita theorem of Rickard, 京都大学数理解析研究所, 2005-10-08

(26) 河田成人, 群環の Heller 格子の直既約性について, 日本数学会秋季総合分科会代数分科会一般講演, 2005-09-20, 岡山大学

(27) 浅芝秀人, Ringel-Hall algebra について, 第 50 回代数学シンポジウム, 徳島大学, 2005-08-05

[その他]

浅芝秀人ホームページ:

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~shasash/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

浅芝 秀人 (ASASHIBA HIDETO)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号: 70175165

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 60204575

住岡 武 (SUMIOKA TAKESHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90047366

河田 成人 (KAWATA SHIGETO)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 50195103

加戸 次郎 (KADO JIRO)

大阪市立大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号: 10117939