

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005～2008

課題番号：17540039

研究課題名 (和文) アソシエーションスキームの構造と表現

研究課題名 (英文) Structures and Representations of Association Schemes

研究代表者

鈴木 寛 (SUZUKI HIROSHI)

国際基督教大学・教養学部・教授

研究者番号：10135767

研究成果の概要：組合せ構造の性質を、それに付随する代数的構造によって解き明かすという代数的組合せ論の中心課題を、アソシエーション・スキームの基集合の部分集合が完全正則符号になる条件を、部分集合に関する Terwilliger 代数の加群の性質で表現する手法を中心に解き明かすことに成功した。関連して、強閉な距離正則符号を持つ距離正則グラフの分類を行った。また非原始的 Q-多項式型スキームに関する例外型の一つのクラスの非存在を示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,200,000	0	1,200,000
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,400,000	420,000	3,820,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：距離正則グラフ, アソシエーション・スキーム, Terwilliger 代数, 完全正則符号

1. 研究開始当初の背景

符号・デザイン・グラフといった、組合せ構造を研究するための枠組みとして、置換群に付随する組合せ構造として定義されるアソシエーション・スキームは重要な位置を占める。アソシエーション・スキームを用いて、組合せ構造の部分構造を調べる手法は 1970 年代の Delsarte の仕事を皮切りに、発達してきた。一方、P-かつ Q-多項式型のアソシエーションスキームの分類問題と関連して、Terwilliger 代数の理論が、Terwilliger を中心として、1980 年代後半から発達し、最近では、Leonard 対, Tridiagonal 対という数学の諸分野および数理論理と関連した研究

として結実している。特に、近年の、Terwilliger, 伊藤, 野村の研究は特筆に値する。しかし、Terwilliger 代数の加群の構造は、かなり解明されてきているものの、組合せ構造特に、部分構造との関連の解明については、殆ど成功していなかった。鈴木は、Terwilliger 代数を、組合せ構造の部分構造の研究に応用するため、Terwilliger 代数の定義を拡張し、雑誌論文⑧において、その基本的な理論を構築した。しかし、この Terwilliger 代数の拡張を、具体的な組合せ構造に応用することは、為されていなかった。具体例の収集と、Terwilliger 代数の有効利用への期待、Brouwer 等の Width - Dual

Width に関する論文との関連性の解明などの課題が浮き彫りになっていた。

2. 研究の目的

アソシエーション・スキームは置換群に付随する組合せ構造をモデルに定義されたもので、置換表現の Hecke 環に対応する代数的構造をもつ。表現と関係した代数的性質と組合せ構造の性質の関連を中心に以下の問題を解き明かすことが本研究の中心的目的である。

(1) 距離正則グラフは、アソシエーション・スキームの結合関係がグラフの距離で与えられ、直交多項式とも関連して、アソシエーション・スキームの中でも最も重要なクラスである。鈴木が雑誌論文⑧で定義した Terwilliger 代数の拡張と、その既約加群の性質を調べることにより、特に以下の項目に関する、グラフの部分構造の全体への埋め込み問題を解明する。

① Tight vector を持つケースを媒介として、 Q -多項式型スキーム、および Thin case との関連を得、分類を得る。部分集合の特性ベクトルが Tight となるケースは、その部分集合が covering radius 最小の距離正則符号となる場合であり、特に調べる価値がある。

② 長年の課題である Geometric Girth の上限の存在問題解決に向けて、Terwilliger 代数の既約加群の性質との関連を研究する。

(2) Q -多項式型スキームの構造は、殆ど研究されていない。例の収集とともに、特別なスキームに関する研究を目指す。

(3) 絡み目の不変量を与えるスピン・モデルを構成する Type II 行列には、アソシエーション・スキームが付随することを野村が示し、そのスキームが非原始的になる条件は、細谷-鈴木によって解決されたが、スピン・モデルを含むスキームについては、解明されていないので、その研究を推進する。

(4) 非対称なスキームの中で、どのようなものが良い基本的なスキームであるかは、重要な問題であるが、特に、王-鈴木によって研究が始められた、弱距離正則有向グラフに付随するスキームが可換かどうかに関連して、次数が 3 の弱距離正則グラフの分類を目指す。

3. 研究の方法

基本的には個人研究である。以下に本研究における手法のうち特徴的な部分を記す。

(1) コンピュータの利用：

既知の距離正則グラフ内の、種々の完全正則符号の例を特に代数系に特化した Gap, Magma を利用して求める、一般的な数式処理ソフト Maple, Mathematica も適宜利用する。このために、2005年に据え置き型コンピュータを購入、2008年はじめに Magma を購入した。また研究室以外での利用および発表などのために、2006年と2009年に Notebook 型コンピュータを購入した。

(2) 各研究者との協力

① Terwilliger 代数に関して、金沢大学、東北大学、Wisconsin 大学（米国）、東京医科歯科大学の研究者と情報を交換した。

② 距離正則グラフに関して、大阪教育大学、北京師範大学（中国）、北京大学（中国）、河北師範大学（中国）、東北大学、POSTEC（韓国）の研究者と協力した。

③ アソシエーション・スキームに関して、釜山大学（韓国）、九州大学、金沢大学、東北大学、Iowa 州立大学（米国）の研究者と協力した。

④ 弱距離正則有向グラフに関して、北京師範大学（中国）の研究者と協力した。

⑤ 北京師範大学（中国）の王氏と協力して、距離正則グラフに関する問題を整理し、Problems of Distance-Regular Graphs としてネット上に公開した。

⑥ 河北師範大学（中国）の高氏と交流した。高氏は中国政府派遣研究者として ICU に 5ヶ月滞在し共同セミナーなどを行うと共に、その後、鈴木が訪中し、河北師範大学（中国）で、大学院生を指導、その時のセミナーや講演をもとに、Algebraic Methods in Graph Theory の講義録を書き始めた。

⑦ 2005年度には ICU に滞在中の米国の研究者に依頼して、論文の幾つかに関し、Native check と、校正方法について学んだ。

(3) 連携研究者との連携

① 代数幾何、特に代数曲面についての理論を学び、それぞれの離散版について、考察を行った。特に、2008年2月に行った University of California（米国）の研究者を招いてのセミナーは、視野を広げアイデアを得るためにも有効であった。

② 微分幾何および、変換群と関連した幾何から、距離の対称性をのぞいた空間について考察し、その離散版を考察した。

(4) 大学院生の協力

研究集会およびセミナーなどの内容の記録を依頼し、内容の概説を得ると共に、出席することができない研究集会での発表に関する知見などを得た。

4. 研究成果

拡張された Terwilliger 代数の応用が格段に広がり、さらに、飛躍が期待される。特に以下の成果が得られた。

(1) 雑誌論文⑧が小さな修正後出版された。この論文は、部分集合上で定義される Terwilliger 代数を新たに定義し、その基本的な性質について述べたもので、特に、Tight の条件のもとで、Thin を一般的に導く、非常に強い定理を含んでいる。この定理を、部分集合の特性関数に応用した場合には、Thin という条件は、完全正則符号という条件と一致する。その場合は、本論文が発表されるすこし前に、Brouwer-Godsil-Koolen-Martin により出版された論文の二つの主定理のうちの一つと対応している。Brouwer 等の論文は、その双対についても考察しており、一般のベクトルの場合に、鈴木が示した形の定理が存在するかは、大きな問題である。その問題提起の意味でも、本論文は需要である。

(2) 雑誌論文⑥において、Geometric Girth の上限と、Thin irreducible module の関連を明確にした。すでに、すべての irreducible T-module (Terwilliger 代数の加群) が Thin であるときは、Geometric Girth の上限が存在することが示されていたが、endpoint が 2 のものがすべて Thin という条件および、endpoint 3 のものがすべて Thin という条件を詳しくしらべ、上記の結果の大幅な改善を行った。距離正則グラフの Geometric Girth の上限を得る問題の解決は、まだ難しいと思われるが、この定理から得られるものは、実際の上限とよく符合しており、今後の進展が期待できる。

(3) 雑誌論文⑤において、Homogeneous と Tight の条件について考察し、Brouwer 等の論文で扱った場合との結びつきを明確にすることに成功した。本論文出版の少し前には、endpoint 1 の Terwilliger 加群と、1-homogeneous の関係をのべた、Curtin-Nomura の論文が出版されたが、本論文と融合された形の、結果が期待される。

(4) Terwilliger-Weng は、Regular Near Polygon の二番目に大きな固有値が満たすべき不等式を得、それが等号となるときは、Hamming または、Dual Polar Graph であることを示した。雑誌論文④は、その問題のある Tight vector の存在のもとで示し、Strongly Regular Graph が部分グラフとして含まれ、その Tight vector がある場合は、ある Balanced Condition を満たすことを示した。部分集合の Terwilliger 代数の応用としても、興味深い定理だと思われる。

(5) 雑誌論文③は、2-homogeneous で、三角形が無いグラフの分類を進展させたものであるが、その最後に、2-homogeneous で三角形を含まないグラフと、四角形が完全正則符号となる場合の関連をしめし、四角形が完全正則符号となる場合を直径が 4 以上という上限のもとで完全に決定している。ある部分グラフをあたえ、そのグラフが、完全正則符号となる場合の全体のグラフの決定という、興味深い問題への先鞭をつけた論文としても、重要であると思われる。

(6) 雑誌論文①は、(5) で述べたことをすべて、強正則グラフが、完全正則符号となる場合、ある条件のもとで全体のグラフを分類している。特に、Tight の場合は、完全にグラフが決定されている。この問題は、その後さらに発展し、平木によって、一般の直径の距離正則グラフが完全正則符号で、かつある条件を満たすと、全体のグラフが特徴付けられるという結果へと発展している。完全正則符号のパラメーターに関してある程度の条件が現在は必要である。これが一般の条件で解ければ、D-bounded な距離正則グラフで Geometric Girth が 4 の場合の分類へと結びつくことになる。さらなる発展を期待したい。

(7) フィリピンからの留学生 D. Cerzo と、 $d=4$ の場合の例外型の非原始 Q -多項式型、アソシエーション・スキームの非存在を示すことができ、それが、雑誌論文②として出版された。のこりは、 $d=6$ のみである。近い将来の解決が望まれる。

(8) いくつかの講義録が完成しつつある。若い、研究者の育成の為にも、丁寧な講義録は重要である。完全正則符号と、Terwilliger 代数に関する、講義録を、ある程度書くことができているが、近い将来完成させたいと願っている。

本、科学研究費によって、この分野は著しい進展を得ることができたと言える。さらなる進展を期待する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① H. Suzuki, Parallelogram-Free Distance-Regular Graphs Having Completely Regular Strongly Regular Subgraphs, Journal of Algebraic Combinatorics. [査読有り・印刷中]

② D. Cerzo and H. Suzuki, Non-existence of Imprimitive Q -polynomial Schemes of Exceptional Type with $d=4$, European Journal of Combinatorics 30 (2009), 674-681. [査読有り]

③ H. Suzuki, Almost 2-Homogeneous Graphs and Completely Regular Quadrangles, Graphs and Combinatorics 24 (2008), 571-585. [査読有り]

④ H. Suzuki, On Strongly Closed Subgraphs with Diameter Two and the Q -Polynomial Property, European Journal of Combinatorics 28 (2007), 167-185. [査読有り]

⑤ R. Hosoya and H. Suzuki, Tight Distance-Regular Graphs with Respect to Subsets, European Journal of Combinatorics 28 (2007), 61-74. [査読有り]

⑥ H. Suzuki, The Geometric Girth of a Distance-Regular Graph Having Certain Thin Irreducible Modules for the Terwilliger Algebra, European Journal of Combinatorics 27 (2006), 235-254. [査読有り]

⑦ Y. Shimizu, Selberg-Witten Integrable Systems and Periods of Rational Elliptic Surfaces, Contemporary Mathematics 416 (2006), 237-247. [査読有り]

⑧ H. Suzuki, The Terwilliger Algebra Associated with a Set of Vertices in a Distance-Regular Graph, Journal of Algebraic Combinatorics 22 (2005), 5-38. [査読有り]

[学会発表] (計 5 件)

① H. Suzuki, Extra-Special Groups, Group Schemes and Balanced Set, Mini-Workshop on

Finite Groups, National Center for theoretical Sciences, National Cheng Kung University, Tainan, R. O. C., March 13, 2009.

② 清水勇二, D-branes and Lowen's derived deformation, 第3回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学, February 20, 2008.

③ H. Suzuki, 2-Homogeneity and Completely Regular Strongly Regular Subgraphs, 「有限群論と代数的組合せ論」研究集会、京都大学数理解析研究所, December 18, 2007.

④ H. Suzuki, Parallelogram-Free Distance-Regular Graphs Having Completely Regular Strongly Regular Subgraphs, The 22nd Algebraic Combinatorics Seminar at Pusan National University, November 24, 2007.

⑤ 清水勇二「2次元複素射影空間の非可換変形」数学談話会, 九州大学, July 4, 2007.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 寛 (SUZUKI HIROSHI)
国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号: 1 0 1 3 5 7 6 7

(2) 研究分担者

清水 勇二 (SHIMIZU YUJI)
国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号: 8 0 1 8 7 4 6 8
(2005-2007年度)
山川 あい子 (YAMAKAWA AIKO)
国際基督教大学・教養学部・准教授
研究者番号: 8 0 1 1 2 7 5 4
(2005-2007年度)

(3) 連携研究者

清水 勇二 (SHIMIZU YUJI)
国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号: 8 0 1 8 7 4 6 8
(2008年度)
山川 あい子 (YAMAKAWA AIKO)
国際基督教大学・教養学部・准教授
研究者番号: 8 0 1 1 2 7 5 4
(2008年度)