

平成 21 年 6 月 18 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005～2008

課題番号：17540040

研究課題名 (和文) 群複体の表現と高次元双対弧

研究課題名 (英文) Representations of subgroup complexes and dimensional dual arcs

研究代表者

吉荒 聡 (YOSHIARA SATOSHI)

東京女子大学・文理学部・教授

研究者番号：10230674

研究成果の概要：有限単純群の特質を表すのに有効な組合せ構造は、一般化された多角形とサークル幾何などから組み立てられる。サークル幾何のベクトル空間中への表現である「高次元双対弧」のうち、最大個数のメンバーを持つものを「高次元双対超卵形」と呼ぶ。本研究では、高次元双対超卵形の構成、分類が進展した。特に、二重可移な自己同型群を持つもののほぼ完全な分類が得られ、既知の例のうち極空間に埋め込めるものも確定した。更に、2005 年以来新しい系列が発見されて盛んに研究が行われている非線形関数 (偶標数の有限体上の関数のうち最も線形関数から遠いもの) が quadratic であれば、2 元体上の高次元双対超卵型が構成できることを観察した。これは高次元双対超卵形が、非線形関数の研究に有効な幾何学的アプローチを与える可能性を示唆する。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	900,000	0	900,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	480,000	3,780,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群複体、高次元双対弧、高次元双対超卵形、散在型単純群、多重可移群

1. 研究開始当初の背景

研究代表者の興味を中心は、有限単純群の性質をよく説明する組合せ幾何構造にある。Tits による球面型の建物理論(1974 年)によれば、一般化された多角形を組み立てれば、Lie 型の群を良く説明する幾何構造である建物(building)が得られる。有限単純群の分類完成が間近に迫った 1980 年頃、一般化さ

れた多角形に加えてサークル幾何とその他少しの特別な幾何を組立て材料として採用すれば、散在型単純群を含むすべての有限単純群を説明する幾何構造が得られることが観察された。これらの幾何構造は単純群のある部分群のなす複体と見なせるが、部分群複体の「表現論」は、複体を組合せ論的に扱う際の有効な手段として 1985 年頃から

S.D.Smith, M.Ronan, A.A.Ivanov, Shpectorovらを中心に開発されてきた。

研究代表者は平成9年度から12年度に科学研究費補助金の交付を受けた研究「群の作用する複体の意義と特徴付け」において、サークル幾何を許した幾何構造である「拡大双対極空間」を研究した。そこでは、従来の群論的手段では捉えられなかった対称性の低い拡大双対極空間を構成するため、サークル幾何の表現が必要となった。「高次元双対弧」という概念は、可換代数の範疇におけるサークル幾何の表現であり、Pasini, Huybrechts及び代表者により、あるベクトル空間中の特殊な交わり方をする部分空間の束として1996年頃に定式化された。この概念は、それ以来、有限幾何や組み合わせ論における多様な数学的対象を説明するのに有効に使用されてきた。

一方、上記研究「群の作用する複体の意義と特徴付け」において、一般化された建物やサークル幾何は単純群の根基部分群のなす複体と本質的に関連していることが研究代表者及びS.D.Smithにより1997年頃観察された。研究代表者が平成13年度から15年度に積極的に推進した科研費研究「散在型単純群の根基 p 部分群の決定とその応用」は、一般化された建物やサークル幾何以外の、群論的に意味のある組合せ幾何構造(単純群の根基部分群のなす複体と本質的に関連しているもの)をすべて尽くそうという意図に基づくものである。その成果として、すべての散在型有限単純群とすべての素数 p に対して、根基 p 部分群が分類された。5の論文^{2,3}にその成果がまとめられている。また、この成果に基づき、BensonとS.D.Smithにより、各散在型単純群に対する2-完備分類空間が構成された(Classifying spaces of sporadic groups, AMS monograph 147, 2008)。

2. 研究の目的

1に述べた状況を受けて、本研究では次の3主題に関する研究の進展が目的として設定された。

- (a) 部分群複体の可換及び非可換な表現論
- (b) 異なる素数に対する根基部分群幾何達の相互関連
- (c) 高次元の双対弧

主題(b)は根基部分群の分類完成の成果に引き続き追究すべき自然なものであり、主題(a)の発展は、これらの(具体的な)部分群幾何のなす構造の表現を通じて有限単純群を説明する組合せ構造を発見する上で欠かせない。主題(a)のうち、特にサークル幾何

の可換表現が主題(c)であり、その研究を更に推し進めることは、散在型単純群の本質を解明する上で重要である。

科研費申請時には、それぞれのテーマに対して、具体的な問題を次のように設定した。

- (a):(a-1) 散在型単純群に対する中心的根基幾何の非可換普遍表現群を決定する。
- (a-2) ホモトピー同値変形と普遍群の関連についてのなんらかの一般的結果。
- (b):(b-1) 群 G のinvolution centralizerにおける p -部分群複体の構造が2-中心的根基幾何と p -中心的根基幾何の関係にどのように反映するかの説明。
- (b-2) 基本可換 p -群のなす複体のホモロジーの最小非消滅次元が p -階数(-1)より本当に小さくなるような有限単純群の完全決定。(Quillen 次元問題)
- (c):(c-1) 高次元の双対超卵形の構成と分類(特に極空間中に実現できるものの分類)
- (c-2) 関連する(多変数の)置換多項式の分類。

これらの具体的問題設定は、研究の進展につれて多少の修正・変更を余儀なくされたが、おおよそこの観点に従って以下述べる。

3. 研究の方法

2におけるそれぞれの主題に対して、以下の専門家との研究打ち合わせ(実際に対面しての討論または電子メールなどによる意見交換)を中心とした方法で研究が行われた。

- (a) A.A.Ivanov (特に東大滞在期間の討論)
- (b) S.D.Smith, M.Ronan, 澤邊正人, 八牧宏美, 飯寄信保, 千木良直紀
- (c) Pasini, J.Thas, A.Del Fra, Penttila, van Maldeghem, M.Brown, J.Hall, 中川暢夫, 谷口浩朗

成果を論文にまとめる際には、各種の集会における代表者の講演に対する質疑応答を参考にした。特に、次の研究者(敬称略)と交わされたものが役立った。

坂内英一、伊藤達郎、宮本雅彦、北詰正顕、山田裕理、宗政昭弘、原田昌晃、平峰豊、末竹千博、秋山献之、島倉裕樹

主題(c)に関連して研究に生じた非線形関数の関わりについては、Carlet氏及び中川暢夫氏を介して未公開のプレプリントなどの形で多くの情報を得て、その内容を大学院向けの講義や中川氏の大学院学生南氏らとの勉強会などにおいて紹介することにより、代表者の非線形関数への理解を深めるのに役立てた。

4. 研究成果

(1) 2で述べた3つの主題のうち(a),(c)に関しては(c)に関係するものが主体となった。主題(b)に関しては、1で述べたBenson-S.D.Smithの論文検討に終始し、その完成に多少の貢献をしたこと並びに(b-2)に関する計算的結果を得た以外(未発表)は、論文として発表できるような成果は得られなかった。

(2) テーマ(c)に対する成果。

目標(c-1)に関するもの:

(i) 新しい高次元双対超卵形が構成され、それらと従来の構成例との関連が明らかにされた。(5の論文^{12,10,5}に発表)

論文¹²では、Huybrechts 双対超卵形の微小変形として高次元双対超卵形が得られるための条件を定式化し、このようにして得られる高次元双対超卵形を分類した。論文¹⁰では代表者が1999年に置換多項式を用いて構成した高次元双対超卵形をより一般に扱い、同型問題を解決し、自己同型群は1999年に考察した場合を除いて可移でないことを示した。論文⁵では谷口浩朗氏の構成した高次元双対超卵形がHuybrechts 双対超卵形で被覆されることを示し、この事実の応用例を示した。

(ii) 二重可移な自己同型群を持つ高次元超卵形のほぼ完全な分類と特徴付けを得た。(5の論文^{2,1})

Pasini-Huybrechts は1999年に二重可移な自己同型群を持つ高次元双対超卵形の分類を試みているが、上記の論文では、そこにおいて存在が未確定であった場合を消去し、全く手が付けられていなかった二元体上定義される場合においても精緻な結果を得た。論文²で得られた、1999年に代表が構成した高次元双対超卵形の特徴付けは、有効な結果として将来もよく使われると予想される。

(iii) 既知の高次元の超卵形のうち、極空間に埋め込めるものを決定した。(論文⁴に発表)

目標(c-2)に関するもの:

(i) quadratic な関数からある種の部分空間の束が作れるが、関数がA P N関数であること、この束が2元体上の双対超卵形であることが同値であるという事実が観察された。

A P N(almost perfect nonlinear)関数とは、偶標数の有限体上の関数のうち線形(アフィン)関数から最も遠いものであり、暗号論において重要な応用を持つ対象である。A P N関数は、本質的には単項式で表示できると予

想されていたが、この予想を覆す quadratic A P N関数の例が2005年に構成されて以来、活発にA P N関数が構成されている。

しかしながら、A P N関数がおおよそどれだけあるのか等の問題は、殆ど扱われていない。上に述べた事実は高次元双対超卵形が、こうした問題に対する幾何学的アプローチを与える可能性を示している。既に研究代表者やEdel氏による未発表の成果が得られており、この方向の追究を目指す研究「高次元の双対弧と非線形関数」は平成21年度から24年度の科研費研究として採択されている。

(3) その他、A P N関数の候補である関数を有限幾何学的方法から構成する手法を示したのが5の論文³であり、ある種の一般化された四辺形の非存在を差集合的手法により示したのが論文⁶である。論文⁸は置換群の扱いに関するものであり、論文⁷は、高次元双対弧に関する世界初の概説である。2006年頃までの殆どの知見がここに述べられているが、代数的(表現論)観点が中心である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 }(計 12 件)

1 Satoshi Yoshiara, Dimensional dual hyperovals with doubly transitive automorphism groups, European Journal of Combinatorics, 30, 747-757, 2009, 査読有

2 Satoshi Yoshiara, A characterization of a class of dimensional dual hyperovals with doubly transitive automorphism groups and its applications, European Journal of Combinatorics, 29, 1521-1534, 2008, 査読有

3 Nobuo Nakagawa and Satoshi Yoshiara, A construction of differentially 4-uniform functions from commutative semifields of characteristic 2, Lecture Notes in Computer Sciences 4547, 134-146, 2007, 査読有

4 Nao Nambu and Satoshi Yoshiara, Conditions for a class of dimensional dual hyperovals to be of polar type, Finite Fields and Their Applications, 13, 1117-1126, 2007, 査読有

5 Satoshi Yoshiara, Notes on Taniguchi's dimensional dual hyperovals, European Journal of Combinatorics, 28, 674-684, 2007, 査読有

6 Satoshi Yoshiara, A generalized quadrangle with an automorphism group acting regularly on the points, European

Journal of Combinatorics, 28, 653 – 664, 2007, 査読有

7 Satoshi Yoshiara, Dimensional dual arcs--a survey, pp.247—266, Finite geometries, groups, and computation, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2006, 査読有

8 M. Alaeiyan and Satoshi Yoshiara, Permutation groups of minimal movement, Archive Math. 85, 211 – 226, 2005, 査読有

9 Satoshi Yoshiara, Odd radical subgroups of some sporadic simple groups, Journal of Algebra 291, 90 – 107, 2005, 査読有

10 Hiroaki Taniguchi and Satoshi Yoshiara, On dimensional dual hyperovals $S^{\{d+1\}}_{\{\Sigma, \Phi\}}$, Innovations in Incidence Geometry, 1, 197—219, 2005, 査読有

11 Satoshi Yoshiara, Radical 2-subgroups of the Monster and Baby Monster, Journal of Algebra 287, 123—139, 2005, 査読有

12 Alberto del Fra and Satoshi Yoshiara, Dimensional dual hyperovals associated with Steiner systems, European Journal of Combinatorics 26, 173—194, 2005, 査読有

〔学会発表〕(計 15 件)

吉荒聡、Universal な quadratic APN 関数、ミニ研究集会「代数的組合せ論」、2009 年 3 月 19 日、九州大学理学部

吉荒聡、分裂型の高次元双対超卵形、ミニ研究集会「有限幾何とその周辺」、2009 年 1 月 24 日、福岡大学理学部

吉荒聡、APN 関数に対する CCZ 同値性のグラフによる言い換え、ミニ研究集会「代数的組合せ論とその周辺」、2008 年 10 月 25 日、大分大学工学部

4 吉荒聡、高次元の双対超卵形に関連した APN 関数の性質、代数的組合せ論ミニ集会、2008 年 3 月 22 日、神戸学院大学

5 吉荒聡、高次元の双対弧-平面中の二次曲線から出発して、第 5 2 回代数学シンポジウム、2007 年 8 月 6 日、神戸大学

6 吉荒聡、Two to one property of some functions on a finite field of characteristic two、「代数的組合せ論」山形セミナー、2007 年 3 月 19 日、山形大学理学部

7 吉荒聡、Dimensional dual hyperovals admitting large automorphism groups、RIMS 研究集会「群論とその周辺」、2006 年 12 月 18 日、京都大学会館

8 吉荒聡、Dimensional dual hyperovals constructed from quadratic APN functions、研究集会「有限幾何と有限体上の関数」2006 年 10 月 28 日、東京農工大

9 吉荒聡、高次元の双対弧に関する幾つかの

未解決問題、代数的組合せ論ミニ集会、2006 年 3 月 5 日、九州大学理学部

10 吉荒聡、有限 p-群の自己同型群、北陸数論小研究会、2005 年 12 月 26 日、金沢大学サテライトプラザ

11 吉荒聡、Permutation groups with minimal movement、有限群とその周辺、2005 年 10 月 31 日、熊本大学理学部

12 吉荒聡、Automorphism groups of dimensional dual hyperovals、群論・代数的組合せ論、2005 年 10 月 6 日、京大数理解析研究所

13 Satoshi Yoshiara, Dimensions of ambient spaces of dimensional dual arcs, Geometric and Algebraic Combinatorics, August 15, 2005, Oisterwijk, Netherlands

14 吉荒聡、高次元の双対弧--平面上の二次曲線の高次元化、第 2 2 回代数的組合せ論シンポジウム、2005 年 6 月 29 日、愛媛大学総合情報メディアセンター

15 Satoshi Yoshiara, Quotients of some dimensional dual hyperovals, Fifth Shanghai Conference on Combinatorics, May 17, 2005, 上海交通大学

〔図書〕(計 1 件)

小嶋泉編、栗田英質・山田裕理・吉荒聡・脇本実など共著、遊星社、「数理物理学への誘い 6--最新の動向をめぐって」2006 年、63-88

〔その他〕

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

吉荒 聡 (YOSHIARA SATOSHI)
東京女子大学・文理学部・教授
研究者番号：10230674

(2) 研究分担者

小林 一章 (KOBAYASHI KAZUAKI)
東京女子大学・文理学部・教授
研究者番号：50031323

大山 淑之 (OHYAMA YOSHIYUKI)
東京女子大学・文理学部・教授
研究者番号：80223981

山島 成穂 (YAMASHIMA SHIGEHO)
東京女子大学・文理学部・准教授
研究者番号：80086347

石渡 万希子 (ISHIWATA MAKIKO)
東京女子大学・文理学部・助手
研究者番号：80277095

杉山 真澄 (SUGIYAMA MASUMI)
東京女子大学・文理学部・助手
研究者番号：30086368

(3) 連携研究者 なし