

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2005～2008
 課題番号：17540064
 研究課題名（和文） 基本群の有限体上の線型表現から定まる位相不変量と幾何構造に関する研究
 研究課題名（英文） Study on topological invariants derived from linear representations over a finite field of fundamental groups and geometric structures of 3-manifolds.
 研究代表者 北野 晃朗 (KITANO TERUAKI)
 創価大学・工学部・教授
 研究者番号：90272658

研究成果の概要：

3次元多様体、特に結び目の補空間を主な研究の対象としてその基本群の有限体上の線型表現、それを用いて定義される不変量、及びそれらと多様体の幾何学的な構造との関係について研究した。特に表現としては2次元特殊線型群への表現を扱った。具体的にはコンピュータを用いて、与えられた結び目に対する具体的な線型表現、線型表現の共役類の個数、twisted Alexander 多項式の計算を行い、それらを用いて結び目の補空間の間の全射準同型写像の存在や写像度の計算などに関する系統的な研究を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	900,000	0	900,000
2006年度	1,400,000	0	1,400,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	3,400,000	330,000	3,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー、3次元多様体、結び目、基本群、結び目群、線型表現、twisted Alexander 多項式、degree 1 map

1. 研究開始当初の背景

基本群の線型表現を用いた位相不変量として twisted Alexander 多項式の研究が 1990年代から盛んに行われていた。この不変量は古典的な Alexander 多項式の線型表現付き結び目の不変量としての精密化である。従って様々な Alexander 多項式に関する性質や fiber 構造を初めとして幾何学的な構造との関連も解明されつつあった。一方でこうした不変量の理論的な研究とは独立にコンピュ

ータの進歩に伴い、これまであまり具体的に計算を実行することができなかった不変量が非常に大規模に計算をすることが可能になってきていた。そこでこれまで以上に多くの具体例を研究するために、まず計算の自動化とデータの整理が必要となっていた。また、得られた大量の計算結果を用いて、新しい事実を解明する事が可能になりつつあった。

2. 研究の目的

本研究の当初の目的は、

- (1). 3次元多様体の基本群の有限体上の線型表現に関する計算の自動化、
 - (2). 表現から定義される位相不変量の具体的な計算とデータベース化、
 - (3). 幾何構造との関係についての研究、
- の3つであった。

特に位相不変量としてまず取り扱うものとして想定していたものは、2次元特殊線型群に対する **twisted Alexander** 多項式である。

3. 研究の方法

コンピュータを用いて位相不変量を大量に計算するための計算ソフトを自主開発することはせず、これまで他の結び目の研究者により開発された幾つかのソフトをそのまま、あるいは改良して用いた。特に堀江啓一氏 (**SoftwareCradle**) の開発した **Dr. K** をこの研究に適するように改良を行った。

同時に共同研究者の鈴木正明氏 (秋田大学) が **Mathematica** を用いてプログラムを組み、計算の信頼性を高めた。

結び目をコンピュータで扱うためには、和田昌昭氏 (大阪大学) により導入された **n-data** と呼ばれる結び目のコード化を用いた。

また幾何学的な構造としては結び目群の間に全射準同型写像を考えた。全射準同型写像自体は代数的な対象であるが、**degree 1 map** や結び目の周期など幾何学的な構造と密接に関連していることが分かっており、古典的な **Alexander** 多項式との関連も研究されてきているので、これを扱った。

理論的には **Alexander** 多項式の理論の **twisted Alexander** 多項式への精密化を一つの方向性として考えた。

4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

- (1). 和田昌昭氏、鈴木正明氏との共同研究として、一般の有限表示群の間に全射準同型写像が存在するための必要条件を **twisted Alexander** 多項式の言葉を用いて求めた。これは古典的な **Alexander** 多項式に関する全射準同型写像存在のための必要条件の精密化になっている。また **twisted Alexander** 多項式は表現を取り換える毎に得られるため、この結果は無数個の必要条件を求めたことになり、対偶を考えれば、全射準同型写像の非存在に関する無数個の十分条件が得られたことになる。この十分条件はコンピュータを用いることにより具体的に計算可能・判定可能であり、非常に強力な道具となりうる。

- (2). 実際にこの条件を用いて鈴木氏との共同研究で、10交点以下の交点数を持つ素な結び目に関して、どの結び目の組み合わせに対して全射準同型写像が存在するかを完全に決定した。これは理論的な位相不変量の研究を具体的に使った研究として高く評価されている。

- (3). 鈴木氏とは研究をさらに進めて、10交点以下の場合で具体的に得られた全射準同型写像に関してはその存在の幾何学的な理由に関して研究を行った。幾つかの場合に関しては、周期、あるいは **degree 1 map** などその理由を確認した。

- (4). この仕事をさらに松本峰子氏 (創価大)、堀江氏、鈴木氏の4人の共同研究として、11交点以下の交点数を持つ結び目に関しては全射の存在を完全に決定した。

- (5). 無限次元ユニタリ表現を用いた多様体の位相不変量の一つである L^2 -torsion に関して円周上の曲面束の構造をもつ場合に森藤孝之氏 (東京農工大) と共同で研究を行った。幾何構造とのその値の関係に関して結果を得た。

有限体上の線型表現に限ることによりコンピュータを用いた計算が可能になり、それらが大規模に使うことにより全射準同型写像という限られた状況ではあるが、本研究の取り組みとしては十分な成果を上げることができたと考えられる。

今後の課題としてはさらに交点数の高い結び目に関する研究、全射準同型写像と幾何学的な構造との関連などが挙げられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計13件)

- ① Teruaki KITANO and Masaaki SUZUKI, A Partial Order in the Knot Table II, *Acta Mathematica Sinica*, 24, p1801-1816(2008), 査読有.
- ② Teruaki KITANO and Takayuki MORIFUJI, L^2 -torsion invariants and the Magnus representation of the mapping class group, *Groups of Diffeomorphisms, Advanced Studies in Pure Mathematics Volume 52* (2008), Math. Soc. of Japan. 査読有.

- ③ Teruaki KITANO and Masaaki SUZUKI, Twisted Alexander polynomials and a partial order on the set of prime knots, *Geometry and Topology Monographs* 13 (2008), Groups, Homotopy and Configuration Spaces (Tookyo 2005), 307--322. 査読有
- ④ Teruaki KITANO and Masaaki SUZUKI, On the existence of a surjective homomorphism between knot groups, *Intelligence of Low Dimensional Topology 2006*. World Scientific. 査読有.
- ⑤ Teruaki KITANO and Masaaki SUZUKI, A partial order in the knot table, *Exp. Math.* 14 (2005), 385--390. 査読有.
- ⑥ Teruaki KITANO, Masaaki SUZUKI and Masaaki WADA, Twisted Alexander polynomials and surjectivity of a group homomorphism, *Algebr. Geom. Topol.* 5 (2005), 1315--1324. 査読有.

[学会発表] (計 16 件)

- ① 松本峰子-堀江啓一-北野晃朗-鈴木正明, 11 交点以下の素な結び目の間の半順序について. 日本数学会年会 (東京大学), 2009 年 3 月 27 日.
- ② Mineko Matsumoto, A partial order on the set of prime knots with up to 11-crossings, *The Fifth East Asian School of Knots and Related Topics*(Gyeongju TEMF Hotel, Gyeongju, Korea) 2009 年 1 月 13 日.
- ③ Teruaki Kitano-Masaaki Suzuki, On the number of $SL(2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -representations of knot groups. *The Fourth East Asian School of Knots and Related Topics*(Univ. Tokyo), 2008 年 1 月 21 日.
- ④ 北野晃朗, 写像類群と L^2 -torsion, 葉層構造論シンポジウム (東京大学玉原国際セミナーハウス), 2008 年 10 月 31 日.
- ⑤ Teruaki KITANO, L^2 -torsion invariants of a surface bundle over the circle *Braids in Paris* (Institut de Mathematiques de Jussieu, Universite Paris Diderot (Paris 7). France), 2008 年 9 月 18 日.
- ⑥ Mineko Matsumoto, Towards a complete decision about the partial order on the set of the knots with up to 11-crossings, *トポロジーとコンピュータ 2008* (東京工業大学), 2008 年 8 月 29 日
- ⑦ Teruaki KITANO, Magnus representations of the mapping class group and L^2 -Torsion invariants, *Finite Type Invariants, Fat Graphs and Torelli-Johnson-Morita Theory* (CTQM, Aarhus Univ. Denmark), 2008 年 3 月 29 日.
- ⑧ 北野晃朗, 円周上の曲面束の L^2 -torsion 不変量と写像類群の Magnus 表現, *Hodge 理論・退化・特異点の代数幾何とトポロジー研究集会 (第 4 回)* (東北学院大学), 2008 年 3 月 13 日.
- ⑨ 北野晃朗, 写像類群の Magnus 表現と円周上の曲面束の L^2 -torsion 不変量について (東京農工大・森藤孝之氏との共同研究), 広島大学数学教室談話会, 2007 年 11 月 20 日.
- ⑩ 北野晃朗, 結び目群の $SL(2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -表現とその応用, *広島大学トポロジー・幾何セミナー*, 2007 年 11 月 20 日.

- ⑪ 北野晃朗, 結び目群の有限体上の線型表現とその応用 (鈴木正明氏 (秋田大学) との共同研究), 第 54 回全日本トポロジーシンポジウム (会津大学), 2007 年 8 月 8 日.
- ⑫ 北野晃朗—鈴木正明, 結び目群の有限体上の線型表現の個数について, 日本数学会年会 (埼玉大学), 2007 年 3 月 30 日.
- ⑬ 北野晃朗, Twisted Alexander polynomial and related topics (I), 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 2007 年 11 月 28 日.
- ⑭ 鈴木正明, Twisted Alexander polynomial and related topics (II), 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 2007 年 11 月 28 日.
- ⑮ Teruaki KITANO, L^2 -torsion invariants and the Magnus representation of the mapping class group, Groups of Diffeomorphisms 2006 (Univ. Tokyo), 2006 年 9 月 11 日.
- ⑯ 北野晃朗, 円周上の曲面束の L^2 -torsion と写像類群のマグナス表現, 大阪市立大学数学教室談話会, 2006 年 11 月 8 日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北野 晃朗

創価大学・工学部・教授

研究者番号 : 90272658

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

藤井 道彦 (FUJII MICHIIHIKO)

京都大学大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 60254231

森藤 孝之 (MORIFUJI TAKAYUKI)

東京農工大学大学院共生科学技術研究部・准教授

研究者番号 : 90334466

高沢 光彦 (TAKASAWA MITSUHIKO)

東京工業大学大学院情報理工学研究科・助教

研究者番号 : 80323822

(4) 研究協力者

鈴木正明 (SUZUKI MASAACKI)

秋田大学教育文化学部・准教授

研究者番号 : 70431616

松本峰子 (MATSUMOTO MINEKO)

創価大学大学院工学研究科