

## 様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 5 月 20 日現在

研究種目： 基板研究 (C)

研究期間： 2005–2008

課題番号： 17540149

研究課題名 (和文) 関数解析的手法による微分方程式の解の存在とその性質についての研究

研究課題名 (英文) **The existence of solutions and their properties for differential equations by the method of functional analysis**

研究代表者

塩路 直樹 (SHIOJI NAOKI)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・准教授

研究者番号 50215943

研究成果の概要：

Nehari 多様体上には汎関数の値を最小にする関数が存在しない場合や Palais-Smale 条件が崩れる等、臨界点を求めるのに困難が伴う汎関数が対応する楕円型方程式に対し、正值解や符号変化解の存在やその多重性についての結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	900,000	0	900,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度	0	0	0
総計	3,300,000	480,000	3,780,000

研究分野：

非線形関数解析学、関数方程式論、変分法

科研費の分科・細目：

数学・基礎解析学

キーワード：

変分法、正值解、符号変化解、ソボレフの臨界指数、解の多重性、Lusternik-Schnirelmann カテゴリー、変動指数

### 1. 研究開始当初の背景

1990年代に、様々な楕円型方程式に対する符号変化解が得られていたが、多くの論文には証明にギャップがあることが、2004年のClapp-Wethの論文で指摘された。そのギャップとは、ソボレフ空間における汎関数  $u \mapsto \int |\nabla u^+|^2 dx$  が微分可能としていたことである。このギャップは以前にもStruweによって指摘されていたが、多くの研究者は気づいていなかった。また、例えば

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u + |u|^{4/(N-2)} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の正值解の多重性についてはよくわかっていなかった。ただし、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) における有界領域で、 $\lambda$  は正のパラメタである。

### 2. 研究の目的

解の存在を議論しようとしている方程式に対して、これまでの研究手法を適用しようとした際、どこに難しさがあるのかを明らかにし、どのような理由で求めたい解を得ているのかを明らかにしたいと考えている。研究開始当初の背景欄で述べた符号変化解の存在については、単に証明のギャップを埋めるだけではなく、これまでに研究されていたよりも扱いが難しい状況で符号変化解を求めることを目標とした。また、符号変化解に限らず、いわゆるPalais-Smale条件が崩れるような状況における楕円型方程式の解の存在およびその多重性を示すことを目標とした。

### 3. 研究の方法

- (1) 日々の活動として、研究課題について考え、考えたことをノートに書く。また、論文や本を読んで新しい情報を仕入れ、理解したことを整理してノートに書く。
- (2) 毎週セミナーを行ない、連携研究者や学生とディスカッションを行なう。
- (3) 学会・研究集会などで情報収集を行なう。(日本数学会の年会および秋季総合分科会には必ず出席し、情報収集を行なった。その他、

研究課題に関連する数理解析研究所の研究集会や、他大学で開催されるセミナーにできる限り出席した。)

- (4) 学会・研究集会などで研究成果の発表を行なう。(具体的には、5の[学会発表]欄を参照のこと。)
- (5) 他大学の研究者から専門的知識の提供を受けた。(横浜数学セミナーを年に何度か開催し、他大学の教員を招いて講演をお願いした。)

### 4. 研究成果

- (1)  $N \geq 4$ ,  $2^* = 2N/(N-2)$  とし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  は0を含む非可縮な有界領域で、その境界は滑らかとする。 $\lambda > 0$  が十分小さいとき、

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u + |u|^{2^*-2} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は少なくとも  $\text{cat } \Omega - 1$  個の正值解を持つことを示した。ただし、 $\text{cat } \Omega$  は、 $\Omega$  のLusternik-Schnirelmannの意味でのカテゴリーである。

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{|x|^2} |u|^2) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx$$

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle I'(u), u \rangle = 0\}$$

によって、汎関数  $I$  と Nehari 多様体  $\mathcal{N}$  を定めると、この問題は  $\mathcal{N}$  上では  $I$  の最小値を達成する元が存在しないという難しさがある。このような問題に対して解の個数をカテゴリーを使って評価した初めての結果である。証明には相対カテゴリーを用いた。定理の仮定には相対カテゴリーについての記述はなく、証明においてのみ相対カテゴリーを用いた点も目新しい。

- (2)  $N \geq 3$ ,  $2^* = 2N/(N-2)$  とし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  は有界領域で、その境界は滑らかとする。 $d > 0$  が十分小さいとき、楕円型方程式

$$-d^2 \Delta u + u = f(u) \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

の符号変化解の個数は、下から  $\text{cat}(C(\partial\Omega) \times [0, 1]^2, C(\partial\Omega) \times \partial[0, 1]^2)$  で評価できること

を示した。非線型項  $f$  の仮定は、 $f$  の微分可能性やいわゆる Ambrosetti-Rabinowitz の優線形条件は仮定せずに、①  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$  ②  $f(t)/|t|^{2^*-1} \rightarrow 0$  ( $|t| \rightarrow \infty$ ) ③  $t \mapsto f(t)/t$  は、 $(0, \infty)$  において狭義単調増加で、 $(-\infty, 0)$  において狭義単調減少④  $f'_+(0), f'_-(0) \in (-\infty, 1)$  ただし、 $f'_\pm(0) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} f(t)/t$  (v)  $f(t)/t \rightarrow \infty$  ( $|t| \rightarrow \infty$ ) を仮定した。考えている問題は、

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u) & \text{in } \Omega/d, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & \text{on } \partial \Omega/d \end{cases}$$

と同値であることを注意する。 $f$  の微分可能性や Ambrosetti-Rabinowitz の優線形条件を仮定しないので、Palais-Smale-Cerami 列の極限関数として現れ得る方程式の球対称性は期待できない等様々な困難がある。しかしながら、 $F$  を  $f$  の原始関数として、

$$\Phi_d(u) = \int_{\Omega/d} \{(|\nabla u|^2 + |u|^2)/2 - F(u)\} dx$$

と定め、

$$\mathcal{N}_d = \{u \in H^1(\Omega/d) \setminus \{0\} : (\nabla I_d(u), u) = 0\},$$

$$\mathcal{M}_d = \{u \in H^1(\Omega/d) : u^\pm \in \mathcal{N}_d\}$$

と置き、 $d_n \rightarrow 0$ ,  $I_{d_n}(u_n) \rightarrow c$ ,  $\text{dist}(u_n, \mathcal{M}_{d_n}) \rightarrow 0$  のときの  $\{u_n\}$  の挙動をはっきりさせることが、解の個数の評価につながった。ここで、 $c > 0$  は、 $d_n \rightarrow 0$ ,  $\text{dist}(u_n, \mathcal{M}_{d_n}) \rightarrow 0$  を満たす場合の  $\{I_{d_n}(u_n)\}$  が近づき得る値の下限である。

(3)  $N \geq 3$ ,  $1 < p < (N+2)/(N-2)$ ,  $0 < \lambda < (N-2)^2/4$  とする。方程式

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

に対する正値解の最小エネルギーを  $c$  とする。このとき、方程式

$$\begin{cases} -\Delta u + u - \lambda u/|x|^2 = |u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

の符号変化解で、エネルギーが  $2c$  より小さいものが 2 つ存在し、 $\lambda > 0$  が十分小さければ、それらは区別出来ることを示した。

(4)  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) の有界領域とし、 $2^* = 2N/(N-2)$  と置く。 $p : \Omega \rightarrow (2, 2^*]$  は  $\Omega$  のある点で  $2^*$  を取る変動指数とし、方程式

$$-\Delta u = |u|^{p(x)-2}u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial \Omega$$

の正値解の存在について論じた。 $W_0^{1,2}(\Omega)$  から  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  への埋め込みはコンパクトになることについての十分条件を提示し、その結果として、上記方程式の正値解の存在を示した。

(5) 次の楕円型問題に対して、解の多重存在についての結果を得た。

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = Q(x)|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

ただし、 $\mu > 0$ ,  $N \geq 3$ ,  $1 < p < (N+2)/(N-2)$ ,  $Q \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  とする。 $Q(x) \rightarrow 1$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) とし、 $Q$  は異なる 2 点で最大値  $M$  をとるとすると、十分大きな  $\mu > 0$  に対して、少なくとも 3 つの正値解と、少なくとも 4 つの符号変化する解の組が存在することを示した。この定理と似たものが Cao-Noussair [AIHP 13, 1996] によって得られているが、彼らの証明は、一般には成立しない  $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^2 dx : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  の微分可能性を使っているというギャップがある。また、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_* &= \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u^\pm \neq 0, \\ &\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^\pm|^2 + \mu |u^\pm|^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) |u^\pm|^{p+1} dx\}, \\ Iu &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \mu |u|^2) dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) |u|^{p+1} dx \end{aligned}$$

と置くと、Cao-Noussair が議論している符号変化する解は、 $\mathcal{N}_*$  における  $I$  の極小解に対応するものだけであるが、ここでは、mountain pass に対応するエネルギーの高い解の存在も示した。 $Q$  の挙動に付加条件をつけて、さらにエネルギーが高い解の存在も示した。つまり、先ほどの解は線に対する mountain pass で得られたものであるが、最後の解は、面に対する mountain pass で得られたものである。

(6) 次の Neumann 問題に対して、解の多重存在についての結果を得た。

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u + f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ただし、 $\Omega$  を  $\mathbb{R}^N (N \geq 5)$  の有界領域で、その境界  $\partial\Omega$  は  $C^2$  の意味で滑らかとし、 $\lambda > 0$  とする。 $2^* = 2N/(N-2)$  である。 $|f|_{2^*/(2^*-1)}$  が十分小さい任意の  $f \in L^{N/2}(\Omega)$  に対し、上記問題は少なくとも 4 つの解を持ち、少なくともそのうちの 1 つは sign-changing であることを示した。この定理とほとんど同じ結果が Tarantello[Manus. Math. 81] によって報告されている。しかし、その証明において、sign-changing な解を求める際に、一般的には成立しない  $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^2 dx : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  の微分可能性が使われているという難点がある。この論文では、 $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^2 dx$  の微分可能性を使わなくても、上記の結果が成り立つことを示した。汎関数  $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  を、

$$\begin{aligned} Iu &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} fu dx \end{aligned}$$

と定め、 $\Lambda^- = \{u \in H^1(\Omega) : \langle I'(u), u \rangle = 0, \langle I''(u)u, u \rangle < 0\}$ ,  $\Lambda_*^- = \{u \in H^1(\Omega) : u^+, u^- \in \Lambda^-\}$  と置く。このとき、 $Iu = \inf I(\Lambda_*^-)$  を達成する元  $u \in \Lambda_*^-$  が存在することを示した。しかし、 $\Lambda^-$  の場合と違って  $\Lambda_*^-$  は  $C^1$ -多様体ではないので、この  $u$  が  $I$  の臨界点であることはきちんと示す必要があるが、それを解決した。

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 10 件)

- ① Norimichi Hirano, Naoki Shioji,  
Existence of multiple positive solutions for a nonlinear elliptic problem with the critical exponent and a Hardy term,  
Differential Integral Equations 21 (2008), 971–980, 査読有。

- ② Norimichi Hirano, Claudio Saccon,  
Naoki Shioji, Brezis-Nirenberg type theorems and multiplicity of positive solutions for a singular elliptic problem,  
J. Differential Equations 245 (2008), 1997–2037, 査読有。
- ③ Norimichi Hirano, Naoki Shioji,  
Multiple existence of solutions for coupled nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear Anal. 68 (2008), 3845–3859, 査読有。
- ④ Kazuhiro Kurata, Naoki Shioji  
Compact embedding from  $W_0^{1,2}(\Omega)$  to  $L^{q(x)}(\Omega)$  and its application to nonlinear elliptic boundary value problem with variable critical exponent, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 1386–1394, 査読有。
- ⑤ Norimichi Hirano, Naoki Shioji,  
Existence of sign-changing solutions for a nonlinear elliptic problem on  $\mathbb{R}^N$  with a Hardy term, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 1243–1252, 査読有。
- ⑥ Norimichi Hirano, Naoki Shioji,  
A multiplicity result including a sign-changing solution for an inhomogeneous Neumann problem with critical exponent, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137 (2007), 333–347, 査読有。
- ⑦ Norimichi Hirano, Naoki Shioji,  
A multiplicity result including sign-changing solutions for a nonlinear elliptic problem in  $\mathbb{R}^N$ , Adv. Nonlinear Stud. 7 (2007), 513–532, 査読有。
- ⑧ Paul Georgescu, Naoki Shioji,  
Generation and characterization of nonlinear semigroups associated to semilinear evolution equations involving “generalized” dissipative operators, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 14 (2007), 707–730, 査読有。
- ⑨ 塩路直樹,  $\mathbb{R}^N$  におけるある楕円型方程式に対する符号変化する解の多重存在性を含む解

の多重性の結果について, 数理解析研究所講  
究録 1528 (2007), 96-103, 査読無.

- ⑩ Norimichi Hirano, Naoki Shioji,  
Existence of positive solutions for a semi-  
linear elliptic problem with critical Sobolev  
and Hardy terms, Proc. Amer. Math. Soc.  
134 (2006), 2585-2592, 査読有.  
〔学会発表〕 (計 11 件)
- ① Naoki Shioji, Existence of multiple sign-  
changing solutions for a singularly perturbed  
Neumann problem, ワークショップ「非線形  
偏微分方程式における定常問題」, 2008.12.9,  
神戸大学
- ② 塩路直樹, 変動指数を含む Sobolev 空間にお  
けるコンパクトな埋め込み及び  $p(x)$ -Laplacian  
とその臨界指数を含む方程式の非自明解の存  
在について, 日本数学会 2008 年度秋季総合分  
科会, 2008.9.26, 東京工業大学
- ③ Naoki Shioji, Existence of multiple  
positive solutions for a semilinear elliptic  
problem with critical exponent and Hardy  
potential, International conference on  
nonlinear PDE and Applications, 2008.6.12,  
釜山国立大学
- ④ Naoki Shioji, Existence of multiple sign-  
changing solutions for a nonlinear elliptic  
problems in  $\mathbb{R}^N$ , Spring school in nonlinear  
partial differential equations,  
2008.5.29, ルーベンカソリック大学
- ⑤ 塩路直樹, Hardy 項を持つ臨界指数楕円型  
方程式の正值解の多重存在性について, 日本数  
学会 2008 年度年会, 2008.3.25, 近畿大学,
- ⑥ 塩路直樹, Hardy 項を持つ臨界指数楕円型  
方程式の正值解の多重存在性について, 第 57 回  
熊本大学応用解析セミナー, 2007.12.8 熊本  
大学
- ⑦ 塩路直樹,  $\mathbb{R}^N$  におけるある楕円型方程式に  
対する符号変化する解の多重存在性を含む解  
の多重性の結果について, 第 60 回神楽坂解析  
セミナー, 2006.11.25, 東京理科大学

- ⑧ 塩路直樹,  $\mathbb{R}^N$  におけるある楕円型方程式に  
対する符号変化する解の多重存在性を含む解  
の多重性の結果について, 日本数学会 2006 年  
度秋季総合分科会, 2006.9.20, 大阪市立大学
- ⑨ 塩路直樹, A multiplicity result including  
sign-changing solutions for an elliptic  
problem in  $\mathbb{R}^N$ , 2006.6.21, RIMS 研究集会  
「変分問題とその周辺」, 京都大学
- ⑩ 塩路直樹, 臨界 Sobolev 指数を含む非同次  
楕円型方程式の解の多重性について, 日本数  
学会 2006 年度年会, 2006.3.27, 中央大学
- ⑪ Naoki Shioji, Multiple solutions for an  
inhomogeneous Neumann problem with  
critical exponent, Fixed point theory and its  
applications (In memory of Jim Dugundji),  
2005.8.1-8.5, The Mathematical Research  
and Conference Center in Bedlewo (Poland).

## 6 . 研究組織

### (1) 研究代表者

塩路 直樹 (SHIOJI NAOKI)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・  
准教授

研究者番号 : 50215943

### (2) 研究分担者

2005-2007 年度

平野 載倫 (HIRANO NORIMICHI)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授  
研究者番号 : 80134815

2005-2007 年度

玉野 研一 (TAMANO KENICHI)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号 : 90171892

### (3) 連携研究者

2008 年度

平野 載倫 (HIRANO NORIMICHI)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授  
研究者番号 : 80134815

2008 年度

玉野 研一 (TAMANO KENICHI)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：90171892