

平成21年5月12日現在

研究種目：基盤研究（C）  
研究期間：2005～2008  
課題番号：17540153  
研究課題名（和文） 正則自己同型群としてユニタリ群の直積が作用する複素多様体の特徴付け  
研究課題名（英文） A characterization of a complex manifold admitting an action of the direct product of unitary groups by holomorphic automorphisms  
研究代表者  
児玉 秋雄（KODAMA AKIO）  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号：20111320

研究成果の概要： 本研究の主要な目的は、いくつかのユニタリ群の直積が正則自己同型群として効果的に作用するような複素多様体の構造を決定することであったが、この問題自体は非常に難しく、完全には解決できなかった。しかし、多変数関数論の研究においてしばしば登場するような、多くの具体的な領域に対しては多くの興味深い結果が得られた。特に、複素ユークリッド空間内の単位多重円板はその正則自己同型群の構造から完全に特徴付けられることが証明され、論文として印刷公表された。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,000,000	0	1,000,000
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,500,000	510,000	4,010,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：正則自己同型群，双正則同値，位相群，スタイン多様体

## 1. 研究開始当初の背景

2002年にロシアの数学者 A. V. Isaev と N. G. Kruzhilin が共著論文において、 $n$  次ユニタリ群  $U(n)$  が正則自己同型群として効果的に作用するような複素多様体を分類し、その応用として「 $n$  次元複素ユークリッド空

間の、正則自己同型群からの特徴付け」を与えた。その後、彼らとは全く違う手法により研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏は 2004 年の共著論文において「ユニタリ群の直積が正則自己同型群として作用する、複素ユークリッド空間からいくつかの座標

空間を取り除いた空間の特徴付け」に成功した。研究当初、ユニタリ群の直積が正則自己同型群として作用しているような複素多様体の特徴付ける試みは、わずかこれらの論文より見あたらない状況であった。このようなことから、本研究においてユニタリ群の直積が正則自己同型群として効果的に作用する一般の複素多様体の構造を特徴付ける問題に挑戦するに至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は「いくつかのユニタリ群の直積が正則自己同型群として効果的に作用するような複素多様体の構造を決定すること」であったが、この問題を全く一般的な複素多様体の場合に解決することは非常に難解なものであることがわかった。このような事実に鑑み、まずは問題の複素多様体  $M$  が以下のような条件を満たす場合に研究することにした。すなわち、複素  $k$  次元ユークリッド空間  $C^k$  内の単位球を  $B(k)$  とするとき、モデル空間としては多変数関数論の研究において重要である、いくつかの単位球  $B(k_j)$ ,  $j=1, \dots, s$ , と  $m$  次元複素ユークリッド空間  $C^m$  の直積空間  $N=B(k_1) \times \dots \times B(k_s) \times C^m$  を考える。このとき、重要問題として、「複素多様体  $M$  の正則自己同型群  $\text{Aut}(M)$  がモデル空間  $N(1, \dots, s)$  の正則自己同型群  $\text{Aut}(N(1, \dots, s))$  と位相群として同型であるならば、 $M$  は  $N(1, \dots, s)$  に双正則同値であるか？」をあげ、この問題を解決することを本研究の主要な目的に定めた。

## 3. 研究の方法

$k$  次ユニタリ群を  $U(k)$  とおき、ユニタリ群の直積  $U(n_1, \dots, n_s) := U(n_1) \times \dots \times U(n_s)$  が正則自己同型群として効果的に作用するような

複素多様体  $M$  の特徴付け問題については、まず  $M$  の与えられた点  $p$  を通る  $U(n_1, \dots, n_s)$  の軌道  $U(n_1, \dots, n_s) \cdot p$  としてどのような  $M$  の部分多様体が現れるかを詳細に調べる。本研究の特別の場合である 1 個のユニタリ群  $U(n)$  が正則自己同型群として作用する  $n$  次元複素多様体  $M$  の分類問題を扱った Isaev-Kruzhilin 論文によれば、この特別の場合ですら、軌道  $U(n) \cdot p$  の解析には膨大な労力を要するものであった。我々の本研究も大筋では同じ方針で進むことが出来るものと思われた。しかし、1 個の  $U(n)$  の場合に、例えばその軌道  $U(n) \cdot p$  が実超曲面のとき、それが  $M$  の強擬凸超曲面であることなどが比較的簡単な考察でわかるが、我々の場合には一般に軌道  $U(n_1, \dots, n_s) \cdot p$  の余次元は 2 以上であり、もはや超曲面にはなり得ず、 $U(n)$  の場合と比較して軌道空間の解析は格段に難しいものであった。このようなことから、軌道の解析にはリー群の表現論、微分幾何学、CR 幾何学、及び複素解析学の専門家である研究分担者および連携研究者達と協力して本研究を行った。

## 4. 研究成果

研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏はユニタリ群の直積が正則自己同型群として作用する複素多様体の特徴付け問題を研究し、多変数関数論の研究において重要な多くの具体的領域を特徴付けた。特に、複素多重円板や、いくつかの複素単位球の直積空間をそれらの正則自己同型群の構造から完全に特徴付けることに成功した。これらは正則自己同型群から複素多様体構造を決定するという本研究課題に関する重要な結果であり、国際的な数学雑誌に印刷公表された。また、これらの結果を導く過程において得られた多くの手法は今後の研究においてますます重要になるものと確信している。また、連携研究者達は以下に示すようにそれぞれ固有の専門分野に於いて活発な研究活動をするとともに、それらの研究活動を通して得られた様々なアイデアを本研究に提供した。連携研究者菅野孝史氏

は歪エルミート形式のユニタリ群について新谷関数を用いたL関数の構成した。また、非簡約代数群上の保型形式・保型L関数についての基礎的考察をおこない、ユニタリ群とHeisenberg群の半直積群を対象とし、特に3次ユニタリ群へのunitary Kudla liftをヤコビ形式の立場から検討した。連携研究者加須栄篤氏は再生核ヒルベルト空間の理論に基づいたネットワークのレジスタンス距離の観点から、有限ネットワークの収束理論を展開し、特に今年度は無限ネットワークを有限ネットワークの極限として捉える視点からの研究を行い、倉持境界の役割とその重要性を示した。また、倉持境界の具体的な例を構成し、研究論文として(*Rev. Mat. Iberoamericana*)に印刷公表される予定である。連携研究者中川泰宏氏は「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」において、重要な役割を演じるであろうと予想されているKエネルギーの観点から、Einstein・Kaehler計量の一般化である、Kaehler・Ricci ソリトンを考察した。Kaehler・Ricci ソリトンはKaehler類が反標準類の場合に相当するが、一般のKaehler類の場合にKaehler・Ricci ソリトンを一般化しようという試みについても考察し、Tianの定式化を改良することに成功した。連携研究者今吉洋一氏はリーマン面の大域的な正則族の構成をそのモノドロミーとの関連から行い、得られた研究成果を論文として印刷公表した。連携研究者野口潤次郎氏は準アーベル多様体へのレベル1の打ち切り個数関数による最良な第二主要定理の論文を発表し、その応用について研究した。更に、正則束の接続を使う方法により値分布理論の研究を進めた。連携研究者小松玄氏は強擬凸な2次元ラインハルト領域と柱状領域のベルグマン核の漸近展開に現れる6階の非線形常微分方程式(中澤の方程式)の解の構造を調べるとともに、ベルグマン核の不変式論に関する平地および中澤との共同研究の結果の応用として、第一種および第二種変形ベッセル関数の比を含む定積分の実パラメーターに関する漸近展開について論じた。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計19件)

① A. Kodama and S. Shimizu; An intrinsic characterization of the unit polydisc, *Michigan Math. J.* 56 (2008), no. 1,

173--181, 査読有.

② A. Kodama and S. Shimizu;

Standardization of certain compact group actions and the automorphism group of the complex Euclidean space, *Complex Var. Elliptic Equ.* 53 (2008), no. 3, 215--220, 査読有.

③ J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi; The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties. II, *Forum Math.* 20 (2008), no. 3, 469--503, 査読有.

④ G. Komatsu; Asymptotic expansion of the Bergman kernel --- elementary application of the invariant theory, *Complex Analysis and its Applications, Proceedings of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007 OCAMI Studies Volume 2*, 43-63, 2008, 査読有.

⑤ A. Murase and T. Sugano; On the Fourier-Jacobi expansion of the unitary kudla lift, *Compositio Math.* 143 (2007), 1-46, 査読有.

⑥ T. Hattori and A. Kasue; Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 83 (2007), no. 7, 129--134, 査読有.

⑦ J. Noguchi; Some results in the analogue of Nevanlinna theory and Diophantine approximations, *Diophantine geometry*, 259--275, CRM Series, 4, Ed. Norm., Pisa, 2007, 査読有.

⑧ J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi; Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties, *J. Math. Pures Appl.* (9) 88 (2007), no. 3, 293--306, 査読有.

⑨ J. Byun, A. Kodama and S. Shimizu; A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space, Forum Math. 18 (2006), no. 6, 983--1009, 査読有.

⑩ A. Kodama and S. Shimizu; A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space. II, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), no. 3, 643--663, 査読有.

⑪ A. Murase and T. Sugano; Inner product formula for Kudla lift, in "Automorphic forms and zeta functions", World Scientific 2006, 280-313, 査読有.

⑫ A. Kasue; Variational convergence of finite networks, Interdiscip. Inform. Sci. 12 (2006), no. 1, 57--70, 査読有.

⑬ A. Kasue; Convergence of Riemannian manifolds and Laplace operators, II, Potential Anal. 24 (2006), no. 2, 137--194, 査読有.

⑭ A. Kodama and S. Shimizu; A group-theoretic characterization of certain unbounded domains in the complex Euclidean space, Finite or infinite dimensional complex analysis and applications, 187--196, Kyushu University Press, Fukuoka, 2005, 査読有.

⑮ A. Kasue; Convergence of metric measure spaces and energy forms, Selected papers on differential equations and analysis, 79--96, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 215, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 査読有.

⑯ J. Noguchi; Nevanlinna theory and Diophantine approximation, Sci. China Ser. A 48 (2005), suppl., 146--155, 査読

有.

⑰ J. Noguchi; A note on entire pseudo-holomorphic curves and the proof of Cartan-Nochka's theorem, Kodai Math. J. 28 (2005), no. 2, 336--346, 査読有.

⑱ Y. Imayoshi; A construction of holomorphic families of Riemann surfaces over the punctured disk with given monodromy, Finite or infinite dimensional complex analysis and applications, 97-104, Kyushu University Press, Fukuoka, 2005, 査読有.

⑲ Y. Imayoshi and M. Nishimura; A remark on universal coverings of holomorphic families of Riemann surfaces, Kodai Math. J. 28 (2005), no. 2, 230-247, 査読有.

[学会発表] (計30件)

① 野口潤次郎; 準アーベル多様体内の整正則曲線の第二主要定理について, 日本数学会年会, 2009.3.28, 東京大学.

② 野口潤次郎; 代数多様体内の整正則曲線の退化について, 日本数学会年会, 2009.3.28, 東京大学.

③ 野口潤次郎; Lang予想と小林予想をみたく射影超曲面の構成, 日本数学会年会, 2009.3.26, 東京大学.

④ 児玉秋雄; 正則自己同型群による開球の直積の特徴付けに関する結果と問題, 多変数関数論冬セミナー, 2008.12.27, 熊本大学理学部.

⑤ A. Kasue; Harmonic Functions of finite Dirichlet integrals, The 4th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan, 2008.12.22, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China.

⑥ 野口潤次郎; 接続と正則曲線のロンスキアンと第二主要定理について, 京都大学数理解析研究所研究集会: 葉層の微分幾何とベルグマン核, 2008.12.16, 京都大学.

⑦ S. Shimizu; An intrinsic characterization of the direct product of balls, The Twelfth Conference on Real and Complex Analysis (Korea-Japan Seminar on Analysis), 2008.12.4, 東北大学.

⑧ J. Noguchi; Some Second Main Theorems and Applications, Workshop on Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, 2008.11.17, Fields Institute, Toronto.

⑨ J. Noguchi; Unicity, Kobayashi hyperbolicity, rational points and examples, Workshop on arithmetic and hyperbolic geometry, 2008.11.8, University of Montreal, Montreal.

⑩ 中川泰宏; Generalized Kaehler-Ricci ソリトンについて, 幾何学阿蘇研究集会, 2008.9.2, 休暇村南阿蘇.

⑪ A. Kasue; Functions of finite Dirichlet sum and compactifications of infinite graphs, The 1<sup>st</sup> MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, Kyoto, 2008.7.28, 京都.

⑫ J. Noguchi; Some open problems in the value distribution theory and Kobayashi hyperbolic manifolds, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables 2008, 2008.7.15, Shonan Village Center, Hayama.

⑬ J. Noguchi; Connections and holomorphic curves, Conference in Analysis and Geometry in Several Complex Variables, 2008.6.25, Institute of Mathematics, Romanian Academy, Bucharest.

⑭ J. Noguchi; Value distribution and

distribution of rational points, Spring Program Complex analysis in several variables, 2008.3.27, Mittag-Leffler Institute, Djursholm.

⑮ 児玉秋雄; 正則自己同型群による複素多様体の特徴付けの試み, 日本数学会年会, 2008.3.23, 近畿大学.

⑯ 小松 玄; 中澤の微分方程式について, 森本徹先生御退官記念研究集会, 2008.3.18, 奈良女子大学.

⑰ 中川泰宏; Kahler-Ricci ソリトンの一般化について, 福岡大学微分幾何学研究会, 2008.1.11, 福岡大学・セミナーハウス.

⑱ 中川泰宏; Kahler-Ricci ソリトンの一般化について, 幾何学小研究集会, 2007.11.16, KKR ホテル函館.

⑲ 児玉秋雄; An intrinsic characterization of the unit polydisc, 日本数学会秋季総合分科会, 2007.9.24, 東北大学.

⑳ A. Kodama; An intrinsic characterization of the unit polydisc, Effective aspects of complex hyperbolic varieties, 2007.9.12, Centre de la Mer, Aber Wrach, Brest, France.

㉑ G. Komatsu; Asymptotic expansion of the Bergman kernel -- elementary application of the invariant theory, plenary talk at The 15th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007.8.1, Osaka City University.

㉒ A. Kodama; Standardization of certain compact group actions and its applications, Complex function theory and geometry, 2007.6.14, Banach Center, Poland.

㉓ 小松 玄; 聞いておきたかったこと, 研究集会「分析から総合へ——新しい数学の可

能性」, 2006.9.30, 仙台国際センター.

㉒ 清水悟; 複素ユークリッド空間の自己同型群の部分群として与えられるリー群に関する2, 3の注意, 日本数学会秋季総合分科会, 2006.9.19, 大阪市立大学.

㉓ 中川泰宏; エネルギーと臨界計量, 第53回幾何学シンポジウム, 2006.8.5, 金沢大学.

㉔ A. Kodama; A characterization of some product domains admitting  $U(n_1) \times \dots \times U(n_s)$  - actions by biholomorphic automorphisms, Analytic and Geometric Theories of Holomorphic and CR Mappings, 2006.5.1, Banff International Research Station, Banff, Canada.

㉕ 小松 玄; Tian-Catlin-Zelditch によるベルグマン核の漸近展開 (overview), 多変数関数論唐津研究集会(仮題), 2006.2.19, 佐賀県唐津の虹ノ松原ホテル(国民宿舎).

㉖ 小松 玄; 多変数関数論に現れるアダマール変分, 大阪大学微分幾何研究会(坂根先生還暦記念), 2005.12.15, 千里ライフサイエンスセンター.

㉗ 児玉秋雄; An intrinsic characterization of the direct product of balls, 日本数学会秋季総合分科会, 2005.9.22,

㉘ G. Komatsu; Hadamard's variations in several complex variables, Complex Analysis, Differential Geometry and Partial Differential Equations (Conference in Honor of the 80<sup>th</sup> Birthday of Masatake Kuranishi), 2005.5.2, Department of Mathematics, Columbia University.

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 20111320

## (2) 研究分担者

清水 悟 (SHIMIZU SATORU)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 90178971

## (3) 連携研究者

菅野 孝史 (SUGANO TAKASHI)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 30183841

加須栄 篤 (KASUE ATSUSHI)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 40152657

中川 泰宏 (NAKAGAWA YASUHIRO)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号: 90250662

今吉 洋一 (IMAYOSHI YOICHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30091656

野口 潤次郎 (NOGUCHI JUNJIRO)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 20033920

小松 玄 (KOMATSU GEN)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 60108446

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

児玉 秋雄 (KODAMA AKIO)