

平成 21 年 4 月 20 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005～2008

課題番号：17540164

研究課題名 (和文) 作用素関数の研究と直交多項式系への応用

研究課題名 (英文) The study of operator functions and Applications to orthogonal polynomials

研究代表者

内山 充 (Uchiyama Mitsuru)

島根大学・総合理工学部・教授

研究者番号：60112273

研究成果の概要：作用素単調関数の逆関数全体を初めて考察し、積について閉じていることを証明した。そして、二つの関数に関する Majorization の概念を導入して作用素不等式を統一的に一般化した。この Majorization の概念は古典的な二つの数列に関する Majorization の概念の拡張であることを示し、実解のみを持つ多項式、特に直交多項式系に応用した。また、凹関数による行列値関数の固有値分布についての既存の結果を大きく拡張した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	1,000,000	0	1,000,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	450,000	3,750,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：作用素関数、作用素順序、固有値、凹関数、Pick 関数、作用素不等式

1. 研究開始当初の背景

(1) 実軸上の開区間で定義された作用素単調関数については、それが複素平面の上(下)半平面に解析接続でき、その像も同じ半平面にあるという Loewner の定理によって、実軸上の測度を用いて積分表示されることが分かっていた。しかし、具体的な作用素単調関数はそれほど知られていなかった。例えば、 $(0, \infty)$ における作用素単調関数は、指数が 1 より小さい冪関数、対数関数など僅かであった。実際、この区間で増加している、多項式の逆関数が作用素単調であるかどうかは研

究された形跡もなく、Loewner の定理を用いても簡単には判定できない。

(2) 作用素冪についての古田氏の巧みな不等式や、安藤氏による作用素指数関数についての不等式についての多くの論文が発表され、エンドレスの状態であった。

(3) $(0, \infty)$ における正の作用素単調関数 f による行列関数、あるいは f の逆関数による行列関数の固有値分布についての安藤・Zhan の結果は著名であった。この結果をもう少し一般的な関数まで拡張することが望まれていた。

2. 研究の目的

(1) 作用素単調関数を体系的に構成する手法を発見し、作用素不等式の研究に新方向を資することがこの研究の目的である。

具体的には次のようになる。

実軸の区間 I で定義された連続関数 $f(t)$ について、 I にスペクトルを持つすべての有界自己共役作用素 (あるいは行列) X に対して $f(X)$ が定義できる。この作用素関数 $X \rightarrow f(X)$ を作用素順序と固有値分布の観点から解析する。

$$A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$$

を満たすとき、 f は I 上の作用素単調関数と呼ばれ、 $f \in P(I)$ と表される。特に $0 \leq f$ のとき

$f \in P_+(I)$ と表す。

また、 $g(I)=[0, \infty)$, $g^{-1} \in P[0, \infty)$ のとき、

$g \in P_+^{-1}(I)$ とかく。

$$P_+(I) \times P_+^{-1}(I) \subset P_+^{-1}(I)$$

$$P_+^{-1}(I) \times P_+^{-1}(I) \subset P_+^{-1}(I)$$

を示すことが第一の目的である。

(2) $f(t)$, $g(t)$ を実軸の区間 I で定義された連続関数とする。

自己共役作用素 (行列) A, B について

$$g(A) \leq g(B) \Rightarrow f(A) \leq f(B)$$

を満たすとき、 g を f の優関数 (majorization) と呼ぶ。実解のみを持つ二つの多項式については、その実数の解の集合に対する sub-majorization から自然に導入される sub-majorization の古典的概念がある。多項式 f, g についてはその零点の集合に古典的な sub-majorization の関係があれば、上に述べた majorization の関係が成立することを示すことがもう一つの研究目的である。その中で、実多項式の逆関数が作用素単調になるか研究し、直交多項式系に應用する。

(3) 上の(1),(2)の結果を用いて、古田氏や安藤氏の作用素不等式を統一的に一般化することも大きな目的である。

(4) (1)の結果を使い、作用素単調関数による行列関数の固有値分布についての安藤-Zhanの結果を一般の関数に拡張することも目的である。

3. 研究の方法

(1) 作用素単調関数を体系的に構成するために、逆関数全体の集合を研究した。それまでには、このような研究はなかった。

(2) 作用素不等式の研究のために、関数の間に Majorization の概念を導入した。

(3) (1)で述べた、作用素単調関数の逆関数全体が作る集合の閉包を研究した。たとえば、任意の増加凸関数に収束するような関数列をこの集合の中かで構成できるか研究した。

4. 研究成果

(1) 新しい作用素単調関数を体系的に構成することに成功した。そのアイデアは、作用素単調関数の逆関数全体の集合を考えたことである。そしてこの集合が大変よい性質を持っていることを示した。たとえば、広義一様位相で閉じていること、関数の積で閉じていること、作用素単調関数をかけても閉じていることを示した。もう少し具体的に記述しよう。

区間 I で定義された正の作用素単調関数全体を $P_+(I)$, $\log f$ が作用素単調であるような f 全体を $LP_+(I)$, 定義域が I , 値域が $(0, \infty)$, 逆関数が作用素単調であるような関数全体を $P_+^{-1}(I)$ と書く。 $P_+^{-1}(I)$ は積の演算で閉じていて、 $LP_+(I)$ の関数の掛け算で不変であることを示した。

関数 k, h について

$$k(A) \leq k(B) \quad \text{ならば} \quad h(A) \leq h(B)$$

が成立するとき、 k は h の majorization と呼ぶ。 g, k がそれぞれ $LP_+(I)$, $P_+^{-1}(I)$ に属し、 f, h の majorization であるとき、積 gk は積 fh の majorization になることを示した。

(2) この majorization が、二つの多項式の間の古典的な majorization の概念の拡張になっていることを示した。そして、実解のみを持つ二つの多項式、特に直交多項式系に作用素単調の理論を應用した。

作用素不等式の統一的な理論—不等式を得た。これは、上記の作用素単調関数の逆関数の集合についての結果と、majorization の概念を使うことによって証明された。この不等式は、日本人によって証明されたほとんどの不等式を含むと共に、新しい具体的な作用素不等式を作ることができる。

(3) 二つの増加直線に対して、大きいほうの値をとる関数は、典型的な凸関数であるが、これに収束するような作用素単調関数の逆関数の列を構成することに成功した。このことを使って、フランスの数学者 Bourin と次のことをしめした。

半直線 $[0, \infty)$ 上の正值凹関数を $h(x)$ とすれば、

$$h(a+b) \leq h(a)+h(b)$$

が正の数 a, b について成立しているが、行列 A, B についても

$$\text{Trace } h(A+B) \leq \text{Trace } h(A)+h(B)$$

が成立するだけではなく、Trace のほかにすべてのユニタリ不変ノルムについても同じ不等式が成立することを示した。

この結果は、このような不等式が作用素単調関数 h については成立するという著名な Ando-Zhan の定理を大幅に拡張したものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① 内山 充、A New Majorization Induced by Matrix Order, Operator Theory: Advance and Applications, 187(2008) 211--216. 査読あり
- ② 内山 充、A new majorization between functions, polynomials and inequalities II, J. Math. Soc. Japan. Vol. 60, No. 1(2008) pp. 291-310 査読あり
- ③ 幸崎 秀樹、On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, J. Funct. Anal. Vol. 254 no. 1(2008) 84--108, 査読有.
- ④ J. C. Bourin, 内山 充、A matrix subadditivity inequality for $f(A+B)$ and $f(A)+f(B)$, Linear Algebra Appl. 423 (2007), no. 2-3, 512--518. 査読有.
- ⑤ R. Bhatia, 幸崎 秀樹、Mean matrices and infinite divisibility, Linear Algebra Appl. Vol. 424 no. 1 (2007) 36--54, 査読有.
- ⑥ 内山 充、Matrix functions and unitarily invariant norms, 京大数理研講究録 Vol. 1535(2007)112--118, 査読無.
- ⑦ 榎本 正敏、綿谷 安男、Exotic indecomposable systems of four subspaces in a Hilbert space, Integral Equations Operator Theory Vol. 59, no. 2(2007) 149--164, 査読有.
- ⑧ 内山 充、A new majorization between functions, polynomials, and operator inequalities, J. Functional Analysis, 231(2006)221-244、査読有.
- ⑨ 幸崎 秀樹、On the mean of operators. 数学 Vol. 58, no. 2 (2006) 165--182, 査読有.
- ⑩ 幸崎 秀樹、On intersections of domains of unbounded positive operators, Kyushu J. Math. Vol. 60, no. 1(2006) 3--25, 査読有.
- ⑪ 内山 充、Subadditivity of eigenvalue sums, Proc. A. M. S. 134, No5(2005), 1405--1412. 査読有.

⑫ 内山 充、Operator monotone functions and operator inequalities, Sugaku Expositions 18 (2005), no. 1, 39--52. 査読有.

⑬ 内山 充、The family of inverses of operator monotone functions, 京大数理研講究録 Vol. 1458(2005) 156--170, 査読無

[学会発表] (計 13 件)

- ① 内山 充、Majorization and some operator monotone functions、「関数空間セミナー」2008年12月25日、東京理科大学
- ② 内山 充、A New Majorization between functions、International Linear Algebra Society、2008、6/15、Westin hotel at Cancun, Mexico.
- ③ 内山 充、行列関数の固有値和、日本数学会、2008年3月24日、近畿大学
- ④ 内山 充、関数の Majorization と作用素不等式、日本数学会、2008年3月24日、近畿大学
- ⑤ 内山 充、Majorization と作用素不等式、研究集会「線形作用素に関連する不等式とその応用、2008年2月1日 京大・数理研
- ⑥ 内山 充、関数の Majorization、「関数空間セミナー」2007年12月24日東京理科大学
- ⑦ 内山 充、Operator monotone functions and operator inequalities, International conference ``Operator Theory and its applications'', 2006, 12/8-12/9, Kyungpook National University, Korea
- ⑧ 内山 充、作用素単調関数の逆関数「作用素論、作用素環論研究集会」2006年10月東北大学
- ⑨ 内山 充、Matrix functions and unitarily invariant norms、研究集会「線形作用素の理論と応用に関する、最近の発展」2006年10月 京大・数理研
- ⑩ 内山 充、固有値の劣加法性 日本数学会 2006年9月 大阪市立大学
- ⑪ 内山 充、A new majorization and operator inequalities, International Workshop on Operator Theory and Applications, 2006, 8, 3 Seoul National University, Korea

⑫内山 充、 The family of inverses of operator monotone functions and polynomials、 International Conference Topics in Functional and Numerical Analysis, 2005,12,8, Indian Institute of Technology at Bombay, India

⑬内山 充、 The family of inverses of operator monotone functions、 研究集会「線形作用素論と応用に関する最近の発展」
2005年10月 京大・数理研

[図書] (計0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0 件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

○取得状況 (計0 件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内山 充 (UCHIYAMA MITSURU)

島根大学・総合理工学部・教授

研究者番号：60112273

(2) 連携研究者

幸崎 秀樹 (KOSAKI HIDEKI)

九州大学大学院・数理学研究科・教授

研究者番号：20186612

(3) 連携研究者

綿谷 安男 (WATATANI YASUO)

九州大学大学院・数理学研究科・教授

研究者番号：00175077

(4) 連携研究者

原 卓哉 (HARA TAKUYA)

福岡教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：50263984