

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005～2008

課題番号：17540166

研究課題名 (和文) 非線形発展方程式論の変分不等式と準変分不等式への応用

研究課題名 (英文) Applications of the theory of nonlinear evolution equations to variational and quasi-variational inequalities

研究代表者

久保 雅弘 (KUBO MASAHIRO)

名古屋工業大学・工学研究科・教授

研究者番号：80205129

研究成果の概要：

温度変化のもとで物質がその性質を変える相転移とよばれる現象に関連する数学的問題を研究した。この種の問題は単なる方程式ではなく、変分不等式と呼ばれる、不等式によって解に制約条件を課した複雑な構造をしている。無限次元の空間において問題を定式化し、発展方程式論という抽象的な方法を駆使して、解が存在すること、解がただひとつであること、時間がたつにつれて解がどの様に変化するか、などに関する成果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	700,000	210,000	910,000
2006年度	700,000	210,000	910,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	2800,000	840,000	3640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、非線形偏微分方程式

## 1. 研究開始当初の背景

近年、様々な数理モデルに現れる自由境界問題の研究が数理解析上重要なテーマになっている。自由境界問題は適当な変換などにより、変分不等式や準変分不等式と深い関係がある。

変分不等式・準変分不等式の理論は歴史的に非線形発展方程式の理論とともに発展してきた経緯がある。自由境界問題との関連において両理論を研究することで、新たな展開と新機軸を打ち出す機会となろう。

数理モデルの応用としては非平衡熱力学に現れる問題が特に重要である。

## 2. 研究の目的

非線形発展方程式論において確立された理論と方法を応用することによって、変分不等式 (制約条件を課した偏微分方程式) および準変分不等式 (制約条件が未知関数に依存する変分不等式) の研究を進展させる。

(準) 変分不等式の解の存在と一意性、データに関する連続依存性、正則性、時間大域挙動 (大域アトラクター、周期解) について新たな一般的な枠組みを構築する。

非平衡熱力学のモデルへの応用を意識する。

以上の研究を通して非線形発展方程式の理論そのものの発展をも目指す。

### 3. 研究の方法

時間を含む変分不等式を関数解析的に研究するためには、非線形発展方程式の理論のなかで劣微分発展方程式の方法が歴史的によく応用されてきた。

時間に依存する制約条件や未知関数に依存する制約条件の問題に対しては時間依存劣微分発展方程式の理論と方法を応用することが適切かつ有効である。

本研究では研究代表者がこれまでその理論建設と応用に貢献してきた時間依存劣微分発展方程式の方法を効果的に用いることで(準)変分不等式を研究した。研究方法における中心概念は：エネルギー不等式、吉田近似法、および凸関数を用いたリャプノフ法である。

解の構成および時間大域挙動の研究のためにはエネルギー不等式が重要な役割を果たす。研究代表者は1989年に時間依存劣微分発展方程式の可解性問題に関して逆問題を提起・解決し、可解性のための劣微分作用素の時間依存性条件をエネルギー不等式により特徴づけた。以来この観点に基づいて様々な変分不等式を研究してきた。その経験の中で開発・蓄積・確立してきた方法論が本研究でも有効に機能した。

近似問題としては吉田近似の方法を組織的に用いる。この方法は作用素と凸関数(ポテンシャル積分)を同時に近似するという意味で極めて有用な方法である。さらには、時間依存劣微分発展方程式のエネルギー不等式とも連動しており、本研究においても近似解の一樣評価を得るために極めて有効であった。

準変分不等式や移流項を含む微分方程式に関する変分不等式の問題では凸関数のみで問題が定式化できるわけではない。しかし、未知関数を含む凸関数を導入して、不動点の方法を用いることで解の存在にアプローチすることができる。不動点定理を適用する問題においては必然的に時間依存凸関数が現れる。そこで一様(アプリアリ)評価を前述のエネルギー不等式によって導出することによって、本研究で扱った問題においても不動点定理が適用可能になった。

時間大域挙動においても劣微分作用素の方法が有効である。特に大域アトラクターの構成では解軌道に沿って減少してゆく(または有界な)汎関数(リャプノフ関数)を構成することが鍵となるが、劣微分作用素に対する凸関数が自然にその役割をはたす。本研究においても凸関数をリャプノフ関数とみなして大域アトラクターを構成する方法が有効に用いられて、いくつかの問題解決に結実した。

### 4. 研究成果

(1) 退化かつ特異な非線形性をもつ放物型偏微分方程式の初期値境界値問題を研究した。ノイマン境界条件の場合に解が存在するための必要かつ十分な条件を与えた。デイリクレ境界条件の場合には解が存在するための両立条件を発見し、また劣微分作用素で記述するための凸関数を発見した。(論文⑫⑬⑭)

(2) 熱水力学の方程式系(ブシネ方程式)において温度の方程式(エネルギー保存則)に非線形性を考慮した問題を研究した。熱流に退化かつ特異な非線形性を持つ場合に弱解の存在を空間次元に制限なしに証明した。また、温度にノイマン境界条件の場合には弱解が存在するための必要かつ十分な条件を与えた。(論文⑧⑰)

(3) 移流項を含むような楕円-放物型偏微分方程式を研究した。解の存在と一意性、比較定理などに関して一般的な枠組みを劣微分作用素の観点から構築した。時間大域的挙動に関して、与えられたデータが時間周期的な場合に周期解の存在を一般的に証明することに成功した。さらに、具体的な問題(両側制約条件を課した変分不等式)について周期解の一意性と漸近安定性を証明した。また、最適制御問題を研究し、数値解析の観点から解のデータに関する連続的依存性と最適解の存在を証明した。(論文⑥⑦⑨⑪⑬⑳)

(4) 2階非線形放物型偏微分方程式に関する変分不等式の一般理論を構築した。ポテンシャル有する形の放物型偏微分方程式に時間依存制約条件を課した変分不等式に関して解の存在・一意性のための抽象的枠組みを劣微分作用素の観点から創った。その際にエネルギー不等式の方法が有効に用いられた。さらに与えられたデータに関する解の連続的依存性を証明し、周期アトラクターの構成を行った。(論文①⑯)

(5) 温度変化を考慮したPenrose-Fife型の相転移ダイナミクスモデルの研究を行った。このモデルは温度に関する方程式(エネルギー保存則)に退化かつ特異な非線形性が現れることが特徴である。劣微分作用素と極大単調作用素の観点から、温度にデイリクレ境界条件を課した問題に関して、解の存在と一意性を証明した。また、凸関数を具体的に構成することにより、劣微分作用素で問題が記述できることを示した。(論文②⑭)

(6) 双曲型変分不等式の研究を行った。解の時間微分に制約条件を課した問題に関して、1970年代にJ. L. Lionsが提起した問題に答え、長年の懸案であった時間依存制約条件の問題について解の存在と一意性に関する抽象的理論の構築に成功をおさめた。(論文⑩)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

- ① K. Shirakawa, M. Kubo and N. Yamazaki, Well-posedness and periodic stability for quasilinear parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, In: Recent Advances in Nonlinear Analysis, Proceeding of International Conference on Nonlinear Analysis, World Scientific (2008), 181--196. 査読有
- ② A. Ito and M. Kubo, Well-posedness of the Penrose-Fife phase field model, Nonlinear Analysis B: Real World Applications, Vol.9, (2008), 370--383. 査読有
- ③ T. Ohtsuka, K. Shirakawa and N. Yamazaki, Convergence of numerical algorithm for optimal control problem of Allen-Cahn type equation with constraint, in: Proceedings of International Conference on: Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation—Mathematical Analysis, Modelling and Simulation—, GAKUTO Intern. Ser. Math. Appl., Vol. 29, Gakkotosho, Tokyo, (2008), pp. 441--462. 査読有
- ④ A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, A phase-field model of grain boundary motion, Applications of Mathematics, Vol. 53 (2008), 433--454. 査読有
- ⑤ T. Ohtsuka, K. Shirakawa and N. Yamazaki, Optimal control of a singular diffusion equation with constraint, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 18(2008), 1--28. 査読有
- ⑥ N. Yamazaki, Optimal control problems of quasilinear elliptic-parabolic equation, pp. 245--259, in Recent Advances in Nonlinear Analysis, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis, World Sci. Publ., 2008. 査読有
- ⑦ M. Kubo and N. Yamazaki, Elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, Discrete Contin. Dyn. Syst. Vol.19 (2007), 335--359. 査読有
- ⑧ T. Fukao and M. Kubo, Nonlinear degenerate parabolic equations for a thermohydraulic model, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplements, Vol.2007, Number: Special, (2007), 399--408. 査読有
- ⑨ M. Kubo and N. Yamazaki, Periodic stability of elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent boundary double obstacles, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplements, Vol.2007, Number: Special, (2007), 614--623. 査読有
- ⑩ M. Kubo, Second order evolution equations with time-dependent subdifferentials, J. Evol. Equations, Vol.7 (2007), 701-717. 査読有
- ⑪ M. Kubo and N. Yamazaki, Periodic solutions of elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, J. Evol. Equ. Vol.6 (2006), 71 - 93. 査読有
- ⑫ M. Kubo and Q. Lu, Evolution Equations for Nonlinear Degenerate Parabolic PDE, in Nonlinear Analysis TMA, Vol.64 (2006), 1849-1859. 査読有
- ⑬ K.-H. Hoffmann, M. Kubo, N. Yamazaki, Optimal Control Problems for Elliptic-Parabolic Variational Inequalities with Time-Dependent Constraints, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol.27 (2006), 329 - 356. 査読有
- ⑭ A. Ito, M. Kubo and Q. Lu, Subdifferential operator approach to the Dirichlet problem of nonlinear degenerate parabolic equations, in: Ravi P. Agarwal and Kanishka Perera (Eds.), The Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Hindawi, 2006, 441-450. 査読有
- ⑮ M. Kubo and Q. Lu, Nonlinear Degenerate Parabolic Equations with Neumann Boundary Condition, J. Math. Anal. Appl. Vol.307 (2005) 232--244. 査読有
- ⑯ M. Kubo and N. Yamazaki, Quasilinear parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, Adv. Math. Sci. Appl. Vol.15 (2005) 335--354. 査読有
- ⑰ M. Kubo, Well-Posedness of Initial Boundary Value Problem of Degenerate Parabolic Equations, Nonlinear Analysis TMA, Vol.63, (2005), e2629-e2637, 査読有
- ⑱ M. Kubo, Weak solutions of a thermohydraulics model with a general nonlinear heat flux, In: N. Kenmochi (Ed.), the Proceedings of the Third Polish-Japanese Days "Mathematical

Approach to Nonlinear Phenomena”, Gakuto Internat. Series Math. Sci. & Appl. Vol. 23, Gakkotosho (学校図書), Tokyo, 2005, pp. 163--178. 査読有

- ⑱ Y. Giga, H. Kuroda and N. Yamazaki, An existence result for a discretized constrained gradient system of total variation flow in color image processing, Interdisciplinary Information Sciences, Vo. 11 (2005), 199-204. 査読有
- ⑳ N. Yamazaki, Doubly nonlinear evolution equation associated with elliptic-parabolic free boundary problems, Dynamical Systems and Differential Equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement Volume, (2005), 920--929. 査読有

[学会発表] (計 15 件)

- ① 深尾武史、久保雅弘、熱水力学に現れる障害物問題の弱解と漸近挙動について、日本数学会年会、東京大学、2009年3月26日
- ② 伊藤昭夫、剣持信幸、山崎教昭、A phase-field model of grain boundaries、日本数学会年会、東京大学、2009年3月26日
- ③ 山崎教昭、特異拡散方程式に対する近似問題の最適制御について、日本数学会年会、近畿大学、2008年3月25日
- ④ 深尾武史、久保雅弘、熱水力学に現れるある変分不等式と解の正則性について、日本数学会年会、近畿大学理工学部、2008年3月25日
- ⑤ 黒田紘敏、山崎教昭、特異拡散方程式の定常問題について、日本数学会秋季総合分科会、東京工業大学、2008年9月27日
- ⑥ 熊崎耕太、伊藤昭夫、久保雅弘、粘性項の消えた非等温な Penrose-Fife 型の相転移モデルについて、日本数学会秋季総合分科会、東京工業大学、2008年9月27日
- ⑦ 深尾武史、久保雅弘、熱水力学に現れるある変分不等式について、日本数学会秋季総合分科会、東京工業大学、2008年9月27日
- ⑧ 深尾武史、久保雅弘、熱水力学に現れる障害物問題の弱解と漸近挙動について、第34回発展方程式研究会、中央大学理工学部、2008年12月18日(木)
- ⑨ 山崎教昭、非線形発展方程式に対する最適制御問題とその応用、日本数学会年会、埼玉大学、2007年3月28日

- ⑩ 久保雅弘、Second order nonlinear evolution equations with time-dependent subdifferentials、第465回応用解析研究会、早稲田大学理工学部、2007年6月30日
- ⑪ 山崎教昭、線形ヒステリシス効果を考慮した数理モデルに対する最適制御問題について、日本数学会秋季総合分科会、東北大学、2007年9月22日
- ⑫ 深尾武史、久保雅弘、熱水力学に現れる退化放物型方程式系の可解性について、日本数学会年会、中央大学、2006年3月29日
- ⑬ 久保雅弘、山崎教昭、楯円・放物型変分不等式の時間秋季問題について、第32回発展方程式研究会、中央大学、2006年9月4日
- ⑭ 久保雅弘、山崎教昭、Periodic solutions of elliptic-parabolic variational inequalities with constraints、日本数学会秋季総合分科会、大阪市立大学、2006年9月19日
- ⑮ 黒田紘敏、儀我美一、山崎教昭、離散化された束縛条件付全変動流の解の存在と大域可解性、日本数学会秋季総合分科会、岡山大学、2005年9月22日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

久保 雅弘

名古屋工業大学・工学系研究科・教授

研究者番号：80205129

### (2) 研究分担者

該当なし

### (3) 連携研究者

山崎教昭

室蘭工業大学・工学部・准教授

研究者番号：90333658