

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目： 基盤研究（C）

研究期間： 2005～2008

課題番号： 17540174

研究課題名（和文） 函数空間論を用いた種々の非有界領域における
Navier-Stokes 方程式の研究研究課題名（英文） Research on the Navier-Stokes equations in various
unbounded domains by using theory of function spaces

研究代表者

山崎 昌男（YAMAZAKI, Masao）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号： 20174659

研究成果の概要：平行平板間領域における外力付きの Stokes 方程式について、阿部孝之氏と共同で Besov 空間において考察し、特に Poiseuille 流がこの立場で捉えられることを示した。次いで外部領域における外力付きの定常 Navier-Stokes 方程式について、無限遠方での流速が 0 である場合と 0 と異なる場合について統一的に考察し、応用として無限遠方での流速が 0 に近づく場合の解の挙動を精密に調べた。最後に、負階の関数空間における Navier-Stokes 方程式の考察の基礎となる Helmholtz 分解をこれらの空間で構成した。またが威力に関する強い対称性を仮定して、全平面上での定常 Navier-Stokes 方程式の解の一意存在を示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	900,000	0	900,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	480,000	3,780,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：偏微分方程式・Navier-Stokes 方程式・実解析学・関数空間

1. 研究開始当初の背景

(1) 平行平板間での Stokes 方程式

この問題については阿部孝之氏、柴田良弘氏によって、 L_p に属する外力に対する、Sobolev 空間における解の一意存在が示されていたが、この理論は p が無限大の場合には成立しないので、重要な特解である Poiseuille 流との関係が不明であった。

(2) Navier-Stokes 外部問題

この問題については、研究代表者らによる無限遠方における流速が 0 の場合の弱 L_n -空間を用いた研究と、小林孝行氏、柴田氏、榎本裕子氏らによる流速が 0 と異なる場合の L_n -空間を用いた研究があるが、両者で用いられている関数空間と解の構成法が微妙に異なり、両者の関係は不明であった。特に柴田氏らの手法は無限遠方での流速が 0 に近づくにつれ適用範囲が狭くなるので、流速が 0 に近づく場合の考察ができなかった。特にこの問題を考察するには弱 L_n -空間で考える必要があった。

(3) 負階の関数空間に属する初期値に対する Navier-Stokes 方程式

この問題については、全空間においては各種の関数空間における多くの研究があるが、一般領域においては Amann による、考察すべき関数空間 (Sobolev 空間及び Besov 空間) の位相で初期値を滑らかな関数の列で近似し、これらの関数を初期値とする解の列のこの空間の位相についての極限として解を得る手法による研究があるのみ出会った。副指数が無限大である Besov 空間の要素は一般的には滑らかな関数では近似できないので、この空間に属する渦糸等の応用上興味深い例に対しては既存の理論は適用できなかった。

(4) 全平面上の定常 Navier-Stokes 方程式

2次元非有界領域上の定常 Navier-Stokes 方程式については、無限遠方での流速が与えられ、外力がない場合には Amick らによる結果があるが、外力がある場合には、回転対称的な場合以外には殆ど結果がなかった。

2. 研究の目的

(1) 平行平板間での Stokes 方程式

この問題においては、 p が 1 あるいは無限大

の場合は通常の L_p 理論は成立しないので、代わりに p がこれらの値を取る場合でも成立する Besov 空間上の理論を構成し、特に Poiseuille 流を p が無限大の場合の Besov 空間の立場から考察することを目標とした。

(2) Navier-Stokes 外部問題

この問題については、弱 L_n -空間の枠組みで考察することによって、無限遠方での流速が 0 の場合と 0 と異なる場合の双方に通用する解析の手法を開発し、応用として無限遠方での流速が 0 に近づく場合の解の挙動を精密に考察することを目標とした。また外力に関する仮定も、弱 L_n -空間に対応するもので、無限遠方での流速が 0 である場合の結果におけるものにそろえることを目的とした。

(3) 負階の関数空間に属する初期値に対する Navier-Stokes 方程式

この問題については、まずこれらの空間における Helmholtz 分解を得、それを用いて構成される Stokes 作用素の resolvent の評価を示し、その評価を用いた Stokes 半群の理論を展開することにより、負階の属する初期値に対して、近似に依存せず直接解を構成する手法を開発し、特に副指数が無限大の Besov 空間を用いることによって、渦糸等の応用上興味深い初期値に対する解を一般領域上で構成することを目標とした。

(4) 全平面上の定常 Navier-Stokes 方程式

この問題については、まず Stokes paradox を回避するため考察を全平面に限り、外力に強い対称性を仮定した場合の考察を行うことにした。

3. 研究の方法

(1) 平行平板間での Stokes 方程式

この問題においては、まず阿部氏の得た具体的な解公式が Besov 空間での考察にも然るべき評価を持つことを確認し、これを用いて p が 1 あるいは無限大の場合も含めて考察することにした。

(2) Navier-Stokes 外部問題

この問題については、無限遠方での流速が 0 でない場合の研究は通常の L_n -空間でなされてい

たが、0 の場合は L_n -空間での考察はできず、弱 L_n -空間を用いる必要があることが小園英雄氏と代表者によって既に示されていた。一方無限遠方での流速が 0 でない場合には定常解が wake 以外では速く減衰することから、素朴な逐次近似法による解の近似列が強位相で収束しこの極限として解を得るが、0 の場合に箱の近似列は強位相について収束は期待できない。しかし双対空間の理論と実補間法を用いることによって、無限遠方での流速が 0 の場合にも素朴な逐次近似法による近似解の列が汎弱位相について収束し、極限が very weak solution を与えることが研究代表者の以前の結果で示されているので、弱 L_n -空間とその前双対空間である Lorentz 空間を用いる手法を用いることにした。

(3) 負階の関数空間における Navier-Stokes 方程式

この問題においては、Navier-Stokes 方程式を発展方程式に書き直す際に用いられる Helmholtz 分解が第一歩となる。この分解を与える射影作用素は、全空間の場合には Riesz 作用素を用いて表され、従って広い範囲の関数空間での有界性が自明であった。これを一般領域で考察する際には、normal trace の属する関数空間の設定と、それを踏まえた Stokes 作用素の構成が必要となる。近年の一般領域での L_p -理論においては Farwig, Sohr による、境界を局所的に超平面に写し、超平面における Helmholtz 分解を用いる方法が主流であるが、関数空間の複雑さのためこの方法を適用するには困難がある。そこで儀我美一氏による、Stokes 作用素の resolvent を一重層 potential と二重層 potential を用いて表す方法を用いることにした。

(4) 全平面上での定常 Navier-Stokes 方程式

この問題において関数空間を用いようとする弱 L_1 -空間が現れ、この空間は超関数にも含まれず、解析が困難であるので、古典的な各点評価を用いることにした。

4. 研究成果

(1) 平行平板間での Stokes 方程式

ここでは、まず当初の計画通り、阿部氏の得た基本解の公式が Besov 空間の枠組みでも解の評価を与えることを示した。次いでこの事実を用いて考察を進め、 p が 1 と無限大の間にある場合には成り立っていた、外力を定めた場合の解の

一意存在が、 p が無限大の場合には一意性が成り立たず、外力が 0 の場合に存在する非自明な解が考察すべき Besov 空間に属すること、及び Poiseuille 流がこのような非自明解として特徴づけられることを示した。またこの結果の双対として、 $p=1$ の場合には、解が存在するためには外力がある種の代数的な条件をみたす必要があることを示した。

(2) Navier-Stokes 外部問題

この問題については、まず考察の基礎となる定常問題について考察した。まず柴田氏によって用いられた Lizorkin 型の Fourier multiplier 評価を用いる Oseen 作用素の基本解の評価が Lorentz 空間においても成り立つことを示し、この事実を用いて時間に依存しない外力に対し、無限遠方での流速が 0 である場合と同じ、弱い仮定の下で、無限遠方での流速が 0 である場合も含めて十分小さい場合に、弱 L_n -空間に属する Navier-Stokes 方程式の小さい定常解の一意存在を示した。更に外力を固定した場合の、定常解の無限遠方での流速に対する依存性を調べ、空間次元が 4 以上の場合にはすべての点で、次元 3 の場合には 0 以外のすべての点で、定常解は弱 L_n 空間の強位相について無限遠方の流速について連続であること、及び次元 3 の場合点 0 においては、強位相、弱位相については連続にならず、汎弱位相についてのみ連続となることを示した。

(3) 負階の関数空間における Navier-Stokes 方程式

この問題については、まず指数が $n/p-1$ より大きく n/p より小さい Sobolev 空間及び Besov 空間における Helmholtz 分解の理論を構成した。ここでは既に述べたように、Stokes 作用素の基本解を一重層 potential 及び二重層 potential を用いて表し、これらの potential が境界上の Besov 空間から考える Sobolev 空間及び Besov 空間への有界作用素を与える事実を用いた。ここでの手法においては、境界の有界性が本質的であり、従って結果は外部領域（及び有界領域）に対してのみ成立が示される。

(4) 全平面上の定常 Navier-Stokes 方程式

この問題については、ある種の対称性と各点評価を持った potential で与えられる外力に対し、渦度が potential と同じ対称性と各点評価をみたすような定常解を、逐次近似法によって構成し、その定常解が然るべき関数空間に属する小さい定常解として一意的なものであることを示

した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Takayuki Abe and Masao Yamazaki, On a stationary problem of the Stokes equation in an infinite layer in Sobolev and Besov spaces, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 印刷中. 査読有

Hayato Fujiwara and Masao Yamazaki, The Helmholtz decomposition in Sobolev and Besov spaces, Advanced Studies in Pure Mathematics, 47-1 (2007), 99-116. 査読有

Yoshihiro Shibata and Masao Yamazaki, Uniform estimates in the velocity at infinity for stationary solutions to the Navier-Stokes exterior problem, Japanese Journal of Mathematics (2), 31 (2005), 225-279. 査読有

[学会発表](計 4 件)

Masao Yamazaki, The stationary Navier-Stokes equation on the whole plane for external force with antisymmetry, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2008 年 9 月

Masao Yamazaki, The stationary Navier-Stokes equation on the whole plane for external force with antisymmetry, Vorticity, Rotation and Symmetry-Stabilizing and Destabilizing Fluid Motion, CIRM, Marseille, France, 2008 年 5 月

Masao Yamazaki, Time-dependent physically reasonable solutions of the Navier-Stokes exterior problem and real interpolation, Centennial Conference of Jean Leray, Banach Center, Bedlewo, Poland, 2006 年 9 月

Hayato Fujiwara and Masao Yamazaki, The Stokes operators and the Navier-Stokes equations in function spaces of negative

order on bounded domains, MSJ-IRI on Asymptotic Analysis and Singularities, Sendai, Japan, 2005 年 7 月.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 昌男 (YAMAZAKI MASAO)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 20174659

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

柴田 良弘 (SHIBATA YOSHIHIRO)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 50114088

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 20188288

榎本 裕子 (ENOMOTO YUKO)
早稲田大学・総合研究機構・講師
研究者番号: 60367042