

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2005～2008

課題番号：17540196

研究課題名（和文） 非線形楕円型方程式の固有値問題の漸近解析

研究課題名（英文） Asymptotic analysis of the nonlinear elliptic eigenvalue problems

研究代表者

柴田 徹太郎（SHIBATA TETSUTARO）

広島大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：90216010

研究成果の概要：本研究では非線形楕円型固有値問題の正值解の漸近挙動について詳細な解析を行った。特に物理的、生物学的な背景を持つ方程式について境界層が現れるような方程式を中心に考察し、常微分方程式の方法、変分法等を援用することにより、解や固有値の漸近挙動を詳しく解析することができた。特にロジスティック方程式に関連した方程式や単振り子の方程式について詳細な考察を行い、十分な成果をあげることができた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	900,000	0	900,000
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	450,000	3,650,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論 固有値問題 特異摂動 変分法 漸近解析

1. 研究開始当初の背景

非線形楕円方程式の固有値問題は、非線形シュレディンガー方程式、サイン・ゴルドン方程式から導かれる楕円型方程式にも現れる、物理学、生物学的、工学的に動機づけられた、重要な数学的研究対象である。しかし非線形問題に関しては、古典的変分法の単純な応用ではこの問題に対して十分な解答を与えていたとは言い難い状況にあった。その

大きな理由は、非線形問題では固有値とその解の臨界値が一致しないことにある。この点が線形問題と非線形問題の大きな相違点であり、新しい解析法が待たれていた。

2. 研究の目的

変分法を主体とし、特異摂動法を援用して、非線形楕円型方程式の固有値、固有関数の漸近的性質を解析することを目的とした。特に

1 つまたは 2 つのパラメーターを含む非線形楕円型方程式の固有値問題における固有値の漸近公式を確立すること、またディリクレ境界条件のもとでの固有関数の領域内部における漸近挙動、境界条件にノイマン条件を課したときに現れる解の内部遷移層などの特異的挙動を詳細に漸近解析することを目標にした。

3. 研究の方法

研究課題に対して、採用する変分法の枠組の解明と適切な常微分方程式論的接近を試みた。この部分が本研究においてはもっとも重要であり、研究成果をあげるためのキーポイントであった。その遂行のため緊密な研究連絡を行った。また、非線形楕円型方程式の正值解の定性的・漸近的性質を研究するため、セミナーを行った。得られた成果を日本数学会や国内の研究集会等、また海外において開催される研究集会などで発表し、それらを通じて意見交換を行い、研究を進展させた。

4. 研究成果

主として常微分方程式論的手法を中心として非線形常微分方程式の固有値問題の固有値や固有関数の漸近挙動に関する詳細な解析を行った。特に 1 次元のロジスティック方程式や単振り子の方程式など、生物学的背景や物理学的背景を持つ方程式に対して詳細な漸近解析を解析すること、また逆問題の視点からの分岐曲線の解析に研究の焦点を絞った。その結果、以下のような研究成果を得ることに成功した。

(1) ロジスティック方程式のような、生物学的背景を持つ方程式に関しては、1 つのパラメーターを含む固有値問題に関し、解の漸近挙動の考察を中心に研究を行った。具体的には、パラメーターが非常に大きいときの固有値パラメーターと解の最大値ノルムの関係をたくみに利用することにより、様々なノルムに関する詳細な漸近解析、漸近展開の公式を確立した。さらに、非線形項が p べきのときで、特に $p = 2, 5$ の場合を考察した。パラメーターが非常に大きいとき、楕円積分の漸近公式をたくみに利用することにより、様々なノルムに関する詳細な漸近解析、漸近展開の公式を確立した。ここで得られた結果で強調したいのは、主要項として p べきの非線形項をもつものに対して、特殊な p の値のときは楕円積分を利用することにより詳しい漸近展開公式が得られることを発見したことである。また、1 つまたは 2 つのパラメーターを含む単振り子に関する方程式の解の漸近挙動の公式を確立した。これらの詳細

な漸近公式はいまだかつて研究されておらず、国内外における研究集会での成果発表で多大なインパクトを与えた。

また、上記で確立した分岐曲線に関する詳細な漸近展開公式の確立により、自然に問題として提起される逆問題的考察、すなわち非線形方程式の分岐曲線から、その方程式に含まれる非線形項をどのような精度で特定できるか、また一意性は成り立つかという基本的な課題を考察し、一意性に関しては、非線形項が解析的であれば分岐曲線は一意的に定まるという、基本的な結果を得ることができた。

分岐曲線の漸近挙動から非線形項を特定するという発想は斬新であり、国内外における研究集会での成果発表で大きなインパクトを与えた。

(2) 解の漸近挙動に関連して、退化ラプラス方程式の球対称解が満たす常微分方程式を含むクラスの常微分方程式を、 $t = \infty$ の近傍で考えその全ての正值解の漸近形をパラメーター $\alpha, \beta, \sigma, \lambda$ を用いて書き上げた。

(3) 変分法の枠組の解明に関連して、非線形現象の数理、特にパターン形成における環境効果の果たす役割、対称の崩れ現象などを非線形偏微分方程式の解析を通して解明することに取り組んだ。特に、数理生態学に現れる反応拡散方程式系の常解、非線形楕円型変分問題の解の構造の研究を行った。

(4) 非線形楕円型方程式に対する特異摂動問題は特異摂動パラメーター $\varepsilon > 0$ が小さいとき、非常に豊かな解構造をもつことが知られている。特に、1 次元問題 (Allen-Cahn 方程式、非線形 Schrödinger 方程式、Fisher 方程式、Gierer-Meihardt 方程式) について $\varepsilon \rightarrow 0$ と共にピークあるいは遷移層の数が無限大へと増加する解の族の挙動を詳しく調べた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

1. Tetsutaro Shibata, L-q inverse spectral problems for semilinear Sturm-Liouville problems, *Nonlinear Analysis* 69, (2008), no. 10, 3601-3609, 査読有

2. Tetsutaro Shibata, Global behavior of the branch of positive solutions to a logistic equation of population dynamics,

Proceedings of the American Mathematical Society 136 (2008), no. 7, 2547–2554, 査読有.

3. Tetsutaro Shibata, Asymptotic expansion formula for the maximum of solutions to diffusive logistic equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008 (2008), no. 161, 1–7, 査読有.

4. Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of bifurcation branch of positive solutions for semilinear Sturm-Liouville problems, *Annales Henri Poincaré* 9 (2008), no. 6, 1217–1227, 査読有.

5. K. Kamo, H. Usami, Positive unbounded solutions of second order quasilinear ordinary differential equations and its application to elliptic problems, *Czechoslovak Math. J.* 58 (2008), no. 4, 1153–1165, 査読有.

6. Byeon, Jaeyoung, Jeanjean, Louis, Tanaka Kazunaga, Standing waves for nonlinear Schroedinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases, *Comm. Partial Differential Equations* 33 (2008), no. 4–6, 1113–1136, 査読有.

7. Felmer Patricio, Martínez Salomé, Tanaka Kazunaga, Highly oscillatory behavior of the activator in the Gierer and Meinhardt system. *Math. Ann.* 340 (2008), no. 4, 749–773, 査読有.

8. Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of solutions to the perturbed simple pendulum problems with two parameters, *Mathematische Nachrichten* 280 (2007), no. 4, 451–462, 査読有.

9. Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of L^q norm of solutions to elliptic eigenvalue problems arising in population dynamics, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 137A, (2007), no. 5, 1081–1090, 査読有.

10. T. Teramoto, H. Usami, Oscillation theorems of quasilinear elliptic equations with arbitrary nonlinearities, *Differential and Integral Equations*, 20 (2007), no. 5, 577–600, 査読有.

11. Tetsutaro Shibata, Global behavior of

the branch of positive solutions for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 186 (2007), no. 3, 525–537, 査読有.

12. Tetsutaro Shibata, Inverse spectral problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Electronic Journal of Differential Equations* 2007 (2007) No. 74, 1–10, 査読有.

13. Tetsutaro Shibata, Asymptotic shape of solutions to the perturbed simple pendulum problems, *Electronic Journal of Differential Equations* 2007 (2007), No. 64, 1–11, 査読有.

14. Tetsutaro Shibata, New asymptotic formula for eigenvalues of nonlinear Sturm-Liouville problems, *Journal d'Analyse Mathématique* 102 (2007), 347–358, 査読有.

15. Tetsutaro Shibata, The relationship between two-parameter perturbed sine-Gordon type equation and nonlinear Klein-Gordon equation, *Indiana University Mathematics Journal* 55 (2006), no. 5, 1557–1572, 査読有.

16. Tetsutaro Shibata, Layer structures for the solutions to the perturbed simple pendulum problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 315 (2006), no. 2, 725–739, 査読有.

17. Tetsutaro Shibata, Three-term asymptotics for the boundary layers of semilinear elliptic eigenvalue problems, *NoDEA Nonlinear Differential Equations and Applications* 13 (2006), no. 1, 23–41, 査読有.

18. Tetsutaro Shibata, Boundary layer and variational eigencurve in two-parameter single pendulum type equations, *Communications on Pure and Applied Analysis* 5 (2006), no. 1, 147–154, 査読有.

19. M. Naito, H. Usami, Existence of nonoscillatory solutions to second-order elliptic systems of Emden-Fowler type, *Indiana Univ. Math. J.* 55 (2006), no. 1, 317–339, 査読有.

20. P. Felmer, S. Martinez, K. Tanaka,

High frequency solutions for the singularly-perturbed one-dimensional nonlinear Schrödinger equation, Arch. Ration. Mech. Anal. 182 (2006), no. 2, 333-366, 査読有.

21. K. Kurata, T. Watanabe, A remark on asymptotic profiles of radial solutions with a vortex to a nonlinear Schroedinger equation, Comm. Pure Appl. Anal. 5 (2006), no. 3, 597-610 査読有.

22. T. Ide, K. Kurata, K. Tanaka, Multiple stable patterns for some reaction-diffusion equation in disrupted environments, Discrete and Continuous Dynamical Systems 14 (2006), no. 1, 93-116 査読有.

23. Tetsutaro Shibata, Asymptotic expansion of solutions to nonlinear elliptic eigenvalue problems, Proceedings of the American Mathematical Society 133 (2005), no. 9, 2597-2604, 査読有.

24. Tetsutaro Shibata, Precise spectral asymptotics for nonautonomous logistic equations of population dynamics in a ball, Abstract and Applied Analysis 2005 (2005), no. 6, 563-573, 査読有.

25. Tetsutaro Shibata, Precise asymptotic properties of solutions to two-parameter elliptic eigenvalue problems in a ball, Advanced Nonlinear Studies 5 (2005), no. 1, 33-56, 査読有.

[学会発表] (計26件)

1. 柴田徹太郎, Precise asymptotic properties of solutions to weakly and strongly perturbed elliptic eigenvalue problems in a ball, 第10回広島応用解析セミナー, 2009年2月10日, 広島大学

2. 倉田和浩, An optimization of the least energy for some nonlinear elliptic boundary value problem, 第10回広島応用解析セミナー, 2009年2月10日, 広島大学

3. 柴田徹太郎, Precise asymptotic properties of solutions to two-parameter elliptic eigenvalue problems in a ball, Workshop on Stationary Problems in Nonlinear Partial Differential Equations,

2008年12月10日, Graduate School of Engineering, Kobe University, Kobe, Japan

4. 柴田徹太郎, Inverse spectral problems for nonlinear elliptic equations, 北九州地区における偏微分方程式研究会, 2008年11月29日, 九州工業大学

5. 柴田徹太郎, Inverse spectral problems of nonlinear Sturm-Liouville problems, 偏微分方程式の諸問題, 2008年10月31日, 東海大学

6. 柴田徹太郎, L-q -bifurcation problems for semilinear Sturm-Liouville problems, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学

7. 柴田徹太郎, Inverse spectral problems of nonlinear Sturm-Liouville problems, Fifth World Congress of Nonlinear Analysis, 2008年7月4日, Hyatt Grand Cypress Resort, Orlando, Florida, USA

8. 柴田徹太郎, Asymptotic shape of solutions to the perturbed simple pendulum problems, 2008 intensive lecture program and international conference on P. D. E., 2008年6月12日, Dynamic Math Center, Pusan National University, Pusan, Korea.

9. 柴田徹太郎, Asymptotic behavior of L-q norm of solutions to elliptic eigenvalue problems, 日本数学会2008年度年会, 2008年3月23日, 近畿大学

10. 宇佐美広介, 2階準線型常微分方程式の緩減衰正值解の漸近形についてII, 日本数学会2008年度年会, 2008年3月23日, 近畿大学

11. 柴田徹太郎, Inverse spectral problems for semilinear Sturm-Liouville problems, 松山解析セミナー(第8回), 2008年2月13日, 愛媛大学

12. 柴田徹太郎, Inverse spectral problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, 第19回北九州地区における偏微分方程式研究会, 2007年11月24日, 西日本工業大学

13. 柴田徹太郎, 非線形固有値問題の解の漸近挙動、偏微分方程式と現象: PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007, 2007年1月15日, 宮崎大学

14. 柴田徹太郎, Inverse eigenvalue problems for nonlinear ordinary differential equations, 関数方程式論におけるモデリングと複素解析, 2007年11月7日、京都大学数理解析研究所
15. 宇佐美広介, 加茂憲一, 2階準線型常微分方程式の緩減衰正值解の漸近形について, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月21日、東北大学
16. 柴田徹太郎, Asymptotic behavior of the branch of positive solutions to nonlinear Sturm-Liouville problems in L^q -framework, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月21日、東北大学
17. 柴田徹太郎, Precise spectral asymptotics for nonlinear ordinary differential equations, 上越教育大学における微分方程式セミナー, 2007年8月28日、上越教育大学
18. 柴田徹太郎, Global behavior of the branch of positive solutions for nonlinear Sturm-Liouville problems, 日本数学会2007年度年会, 2007年3月28日、埼玉大学
19. 田中和永, 無限次元での変分問題 - 解析学の立場からの入門的な話題 -, Encounter with Mathematics 39 'Lusternik-Schnirelman カテゴリー', 2007年3月6日、中央大学理工学部.
20. 柴田徹太郎, Asymptotic properties of solutions to nonlinear eigenvalue problems, 第18回北九州地区における偏微分方程式研究会, 2006年11月25日、西日本工業大学
21. 田中和永, 特異摂動下での非線型 Schrodinger 方程式の定在波の存在, 慶応大学非線形解析セミナー, 2006年10月11日、慶應義塾大学理工学部
22. 柴田徹太郎, Precise asymptotic profiles of positive solutions to nonlinear differential equations, 日本数学会秋季総合分科会, 2006年9月20日、大阪市立大学
23. 柴田徹太郎, Layer structures for the solutions to the perturbed simple pendulum problems, 日本数学会2006年度年会, 2006年3月26日、中央大学理工学部

24. 柴田徹太郎, 非線形 Sturm-Liouville 問題の固有値の漸近挙動, 第17回北九州地区における偏微分方程式研究会, 2005年11月26日、西日本工業大学

25. 柴田徹太郎, 非線形固有値問題の解の漸近挙動, 関数方程式のダイナミクスと数値シミュレーション, 2005年11月3日、京都大学数理解析研究所

26. 柴田徹太郎, 2つのパラメーターを含む単振り子型方程式の固有値問題, 日本数学会秋季総合分科会, 2005年9月19日、岡山大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柴田 徹太郎 (SHIBATA TETSUTARO)
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 90216010

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

吉田 清 (YOSHIDA KIYOSHI)
広島大学・大学院工学研究科・特任教授
研究者番号: 80033893

宇佐美 広介 (USAMI HIROYUKI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90192509

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 20188288

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10186489