様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１　年　５　月　２８　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2005 - 2008
課題番号： 17540203
研究課題名（和文）画像処理問題に於ける Fracture Propagation の解析

研究課題名（英文） Analysis of Fracture Propagation in the problem of image segmentation

研究代表者
山浦　義彦（YAMAURA YOSHIHIKO）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90255597

研究成果の概要：特性関数項を含むエネルギー汎関数の定常、時間発展のそれぞれの問題について、特異項を滑らかな関数によって近似することによって考えられる変分収束近似理論を用いていくつかの性質を導きました。特性関数項には滑らかさおよび凸性がないため、直接既存の変分法的手法が使えません。そこで本研究のメインの手法として考えたのが、変文収束近似法の適用です。この手法は、特性関数項を滑らかな関数によって近似し、いったん第１変分（Euler-Lagrange 方程式）での評価を導出し、それに基づいて目的のエネルギー汎関数の最小化関数の正則性を調べようという方法です。この方法はしかしながら近似指数を上げるにつれ、特異性が増すため、近似したエネルギー汎関数に対する評価は近似指数に関して「一様」でなければなりません。そのため、いくつかの工夫が必要になってきます。主要結果として、自由境界付近での近似最小化関数のグラフの非退化性を証明しました。また特性関数項の近似と空間変数の離散化との併用によりエネルギー勾配流の構成を１次元の場合に行いました。さらに時間変数の離散化との併用により一様連続性をもつ Minimizing movement の構成に成功しました。

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
２００５年度	500,000	0	500,000
２００６年度	400,000	0	400,000
２００７年度	400,000	60,000	460,000
２００８年度	400,000	60,000	460,000
総計	1,700,000	120,000	1,820,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：特異汎関数、 変分収束、 Gradient Flow

１．研究開始当初の背景
特異性をもつエネルギー汎関数に対する変分問題が研究されるようになったのは比較的近年であり、その先駆けとなったのが、Alt と Caffarelli による自由境界問題の変分的手法による正則性の結果でした。彼らの考えたエネルギー汎関数には、特異性を持ついわゆる特性関数項が含まれています。特性関数項が滑らかさおよび凸性を持たないため、単純に第１変分（Euler-Lagrange　方程式）

を具体的研究対象として考えることや、フランス学派を中心に進められた凸性理論による時間発展解の構成といった関数解析的手法をそのまま適用することができませんでした。そこで、彼らは本質的にエネルギーの最小性を使い、幾何学的測度論の手法を駆使することで、エネルギー汎関数の最小化関数に対するリプシッツ連続性及び自由境界に対する正則性を証明しました。これは自由境界の正則性を証明した初めての画期的結果として現在も位置付けられています。

　これとほぼ同時期に、画像処理問題に端を発するSBV(特殊有界変動関数空間)の理論もまたイタリア学派を中心に 1980 年代頃より開発、発展してきました。この画像処理問題では関数解析的に空間を設定し、その空間上で定義されるエネルギー汎関数の最小化関数について、その正則性および自由不連続性集合の正則性を研究することを目指したものであり、Mumford と Shah によって提唱された画像処理問題に対して、完全に数学的な取扱いを可能にした注目すべき結果でした。

　以上のような変分学の内外の研究の流れを踏まえて、本研究では特異性を有するエネルギー汎関数の解析を主なテーマとして、具体的に (1) 自由境界問題、(2) 画像処理問題に対する変分収束近似とその gradient flow の構成を基とする Fracture propagation の解析を目指しました。またこれに伴い可能な限り、特異集合に関する正則性の結果を出すことを目指しました。

２．研究の目的

特異性をもつエネルギー汎関数に対する変分問題とその時間発展問題を、Gradient Flow の構成に特化して解の構成を行います。具体的に扱うエネルギーは、(1) 自由境界型汎関数、(2) 画像処理汎関数です。Gradient Flow の研究は Minimizing movement 法と呼ばれる時間変数の離散化による手法を用いて行います。また、本研究の既存の結果との大きな違いは、特異項を滑らかな関数によって近似する点です。そしてこの近似を「Gamma 収束近似」として取り扱う点です。Gamma 収束性は変分問題の取り扱いに於ける近似手法であり、これと Minimizing movement 法の併用により、特に証明の本質的な部分でエネルギー汎関数の最小性を使うことにより、近似放物型方程式の解の極限関数としてとらえるよりも、真にエネルギー汎関数のエネルギー勾配流の解に特化した性質を導けるものと期待されます。

３．研究の方法

(1) 自由境界汎関数と (2) 画像処理汎関数を具体的な問題として設定して研究を進めました。

(1) については定常問題における変分収束近似理論の精密な評価から始め、その時間発展解構成まで応用させせました。この研究はすでに 2003 年度にこれらの出発点となったエネルギー最小化関数の正則性の結果を基としてそれを発展させる、という方向で研究を進めました。

(2) 主に時間変数の離散化によるエネルギー勾配流の構成に焦点を当て、特に DeGiogi によって提唱された、特異集合との距離関数を時間差分近似項に乗じて得られるエネルギー汎関数に対する minimizing movement の構成を試みました。SBV 関数理論の大家であるイタリアスコーラノルマーレ教授 Luigi Ambrosio 氏を３年度にわたり尋ね、discussion をお願いしました。SBV 関数理論だけでなく、minimizing movement method と curves of maximal slope との関連性を証明した彼の最近の結果を基として議論を交わし、いくつかのキーとなる指摘をいただき、また有用な考察を得ることができました。

４．研究成果

大きく分けて、(1) 定常問題に於ける特異エネルギー汎関数に対する特異項の滑らか化と得られる minimize の性質の研究、(2) Cauchy-Lipschitz-Picard による常微分方程式の解の構成を用いた Gradient Flow の構成、(3) minimizing movment method の適用による自由境界型エネルギー汎関数に対する解の構成、の三つに分類されます。

(1) 自由境界問題に於いて、その最小化関数のグラフが自由境界上で「退化」していないことが自由境界の正則性議論において本質的な鍵になります。ところが、本研究のメインテーマである「特性関数項の近似」を行うと、必然的に第１変分（Euler－Lagrange 方程式）が定式化され、最小化関数もその方程式の解として位置づけられることになります。それは言いかえれば、解が「滑らかさ」を持つことに他ならず、正則性証明などの側面では大きな手がかりになります。一方、自由境界の位置の確定を主眼に置いた際にはこのことは逆に不利に働くことになります。実際、オリジナルのエネルギー汎関数に対する最小化関数の場合、得られる正則性は高々 Lipschitz 連続性であり、それは自由境界上に於いてグラフが coner point になることを意味しています。従って、自由境界の位置は滑らかさが失われている点として特徴づけることが可能になります。実際、最小化関数について、超関数の意味で第１変分を計算したとき、自由境界の集合は

得られる Radon 測度の support になることが簡単な計算によって確かめられます。特性関数を滑らかな関数によって近似すると、この一方から見れば困難な状況が改善されるため、逆に自由境界付近での関数のグラフに sharp な特異性が失われることになります。その結果、自由境界の位置を近似的に求めることもまた困難になってしまいます。以上の経緯から、自由境界型エネルギー汎関数についての定常問題に関して、特性関数項の近似が minimize の自由境界近辺での関数値の挙動に与える影響を調べました。その結果、特性関数の近似方法によって、自由境界問題の大きな特徴である非退化性が、ある弱い意味で保たれることを証明しました。具体的には特性関数項を微分可能な関数によって近似するのではなく、リプシッツ連続な関数によって近似しました。近似関数に特異性を持たせることにより、非退化性を保存させることに成功しました。より強い特異性をもつヘルダー連続関数による近似では、そもそも最小化関数のリプシッツ連続性が保障されないため、リプシッツ連続関数による近似が考えられる最上の近似であることもまたわかります。　なめらかな関数によって近似することにより非退化性は必然的に失われますが、あえて滑らかな関数に対しても「弱い意味での非退化性」を定義したことは新しい視点であると考えます。今後、この結果を時間発展解の解析に拡張する考えです.

(2) 特異関数項を滑らかな関数によって近似するとともに、空間変数を離散化するという方法により、Gradient Flow を構成しました。より詳しく述べれば、特性関数項は微分可能な関数によって近似します。それに加えて、考える関数空間を通常の２乗可積分関数の空間から、区分的定数関数のみからなる２乗可積分関数の空間に置き換えて議論します。その際、エネルギー汎関数に於ける「微分項」は微分商になります。その結果、第１変分に於ける２階微分項は微分商の微分商になります。これは通常の２階微分と異なり大まかに言って単なる関数の差の項として取り扱うことが可能になります。そのもっとも大きな効果として、２階微分に相当する項がリプシッツ連続になることです。それにより、近似の段階で、よく知られた常微分方程式の解の存在についての古典的結果である Cauchy-Lipschitz-Picard の結果を適用することが可能になり、「近似エネルギー勾配流」を関数空間上の常微分方程式の解として構成することが可能になります。その上で得られた解の族に対して、近似指数を上げることにより極限関数として目的のエネルギー勾配流を構成しようという考え方です。この手法の特徴は、特性関数項の近似とともに空間変数の離散化を併用し、Gamma 収束の意味での近似を行うことです。このことにより、最終的に得られる極限関数もある種のエネルギー減少性を持たせることが可能になります。

　この結果の意義は、項の近似と空間変数の近似を合わせて変分収束性を証明し解の構成を行った点にあります。現在得られている結果は空間次元が１の場合に限られています。これは、変分収束性の証明における技術的な理由からです。今後は、この特殊性を使うことなく、一般次元への拡張を試みる予定です.

(3) (2)で述べた方法は、本質的に微分方程式の解の族の極限関数として、目的のエネルギー勾配流を求めるという方法であり、エネルギー減少という観点からすると必ずしも満足のいく結果が得られる手法とは考えられません。なぜなら、極限関数を考える段階で、放物型微分方程式が内包するエネルギー減少性が必ずしも保存されないからです。この手法に対して、菊地紀夫教授とイタリア学派の DeGirogi は独立に「時間差分近似法」を研究しました。放物型方程式の段階で時間微分を差分近似する方法自体は、コンピュータによる微分方程式の解の数値解析に於いては通常よく知られた手法ですが、彼らは変分問題の解析にこの手法を取り入れました。それは考えたいエネルギー汎関数に対して、時間差分近似項を付加し、初期条件からはじめて、逐次エネルギー汎関数の最小化関数を求めていくことで離散近似解を構成し、最後に時間差分近似指数を上げることによって極限関数を考えるという手法です。この手法の大きな特徴は、離散時間の各ステップを「大局的なエネルギー最小化関数」として近似解を構成する点にあります。

　この Minimizing movement method が考案される以前の 1980 年代頃より、DeGiorgi らによって、凸性を仮定しないエネルギー汎関数に対するエネルギー勾配流の概念である Curves of maximal slope (Evolution Curve)の概念が導入されました。これらは、大まかに言えばエネルギー量の減少性不等式を満たすような解のことであり、それに

対する解の存在まで証明されました。ところが存在に対する条件が強く具体的な問題に適用しにくいという点がありました。これに対して Minimizing movement method は、エネルギー汎関数に大局的な minimize が存在するための条件、すなわち、通常の変分学の直接法が適用可能な程度の条件さえ仮定すれば、直ちに理論の適用が可能になるという一般性を持っています。

そこで、本研究ではこの Minimizing movement method を用いて自由境界問題に対するエネルギー勾配流を構成しようというのが主な目的です。ところが上で述べたとおり、この手法は一般的手法であるため、エネルギー汎関数に特異関数項が含まれていても、何ら問題なく Minimizing movement を構成することができますが、その正則性を研究するためには、やはり特異性及び非凸性が本質的困難となってきます。そこで、これまで定常型問題などで培ってきた「特性関数項の変分収束近似」の手法を、併用することで、正則性をもつ Minimizing movement を構成することに成功しました。得られた正則性は空間変数に関しては一様リプシッツ連続性であり、時間変数に関しては 1/2 一様ヘルダー連続性です。これらの正則性を出すたのアイデアは、Caffarelli と Vazquez による近似放物型偏微分方程式の解の極限関数の研究に於ける証明から借りています。はじめに空間変数に関するリプシッツ連続性は、古典的手法である Bernstein method を用いて証明します。これは、大まかに言えば空間変数による微分量は、空間位置を固定して時間のみをさかのぼった時間に於ける空間微分量によって上から評価されるという結果です。その特徴は、近似微分方程式の微分項の「符号」のみからこの結果を導くことができる点にあります。言い換えれば、時間差分近似指数によらずに微分評価が可能になる点が大きな特徴です。このため、時間差分近似指数に従属しない一様評価を得ることに成功しました。次に、時間方向のヘルダー連続性の証明は、Caffarelli と Vazquez らの証明で使われている「barrier method」を適用しました。Barrier method の本質は「比較関数」によるはさみうち評価です。従って、本質的な道具は最大値原理になります。一番問題になるのが、この最大値原理が「時間差分近似解」に対しても成り立つか否か、です。本研究によって、差分近似指数が考える局所時空円柱の高さに比べて十分小さい時には成り立つが、逆に大きい場合は一般に成り立たないことが、反例を構成することによって証明されました。この結果は、菊池教授により得られている DeGiorgi によるヘルダークラス理論や、Campanato 評価などの時間差分近似解に対する結果と符合するものであり、自然な結果であると考えられます。このことを踏まえて、本研究に於ける時間方向ヘルダー連続性の証明では、円柱の高さが時間近似指数より小さい場合には、直接エネルギー最小性に訴えることによってこの困難を回避できることを実証しました。逆に言えば、この一点に於いて、すでに Caffarelli と Vazquez らによって得られている放物型自由境界問題の解との差別化がなされるものと期待しています。実際、この種の放物型自由境界問題の解には一般に「一意性」が望めないため、Minimizing movement method によってえられた正則な解が、Caffarelli-Vazquez らによる解に比べエネルギー勾配流としての特化された性質をもつことが期待されます。今後の大きな課題として、得られた解に対するエネルギー減少性不等式またはそれに関連する事項が重要な研究対象になってくると考えています。

(4) 画像処理問題を扱うエネルギー汎関数については、特異集合との距離関数を含む時間変数差分化問題について、形式的な解の構成は成功しました。この問題は DeGiorgi によって提唱された問題です。画像処理問題に対してもまた、Minimizing movement 法がそのままの形で適用することが可能であり、解の構成も２次元の場合に限ってすでに知られています。しかし、自由不連続性集合が時間経過に伴いどのようなふるまいをするか、についてはこの解に対しては未解決です。これに対して DeGiorgi は時間差分項に自由不連続性集合との距離関数を被積分関数として乗じて得られる離散化エネルギー汎関数を考案し、それに基づいて構成される Minimizing movement の構成及び正則性の研究を提唱しました。 まだこれに関連する論文(結果)は現在一切知られていません。そこで、本研究で得られた解の正則性に関する性質を調べることが今後の大きな課題となります.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① 山浦義彦、A convergence of the approximated free boundary of regularized functional via Gamma-convergence、Journal of Computational and Applied Mathematics、 218/2 (2008)、473-481. 査読あり.

② 山浦義彦、A Gradient flow of the one-dimensional Alt-Caffarelli functional、 Mediterranean Journal of Mathematics、 Vol。4 (2007)、451-482.査読あり.

③ 山浦義彦、A variational approximation inheriting a non-degeneracy property、International Journal of Pure and Applied Mathematics 、 Vol 40 、 No.4 (2007)、473-518. 査読あり.

〔学会発表〕（計　４　件）

① 山浦義彦、Variational approximation and the construction of gradient flows、研究集会「確率論と PDE」於広島大学、2009.1.20

② 山浦義彦、変分収束近似による gradient flow の構成について、研究集会「曲線と曲面の非線型解析」於埼玉大学、2008.12.17.

③ 山浦義彦、Variational approximation and a construction of gradient flows、偏微分方程式研究集会、於熊本大学、2008.10.7

④ 山浦義彦、A convergence of the approximated free boundary of regularised functional via Gamma-convergence、 Twelfth International Congress on Computational and applied Mathematics、 at Katholieke Universiteit Leuven、 in Belgium、2006.7.12

６．研究組織

(1) 研究代表者
山浦 義彦 (YAMAURA YOSHIHIKO)
日本大学 ・文理学部・教授
研究者番号 90255597

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし