様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年３月３１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2005～2008
課題番号：17540363
研究課題名（和文）　物性基礎論としてのランダム行列理論

研究課題名（英文）　Random Matrix Theory and Statistical Physics

研究代表者
香取　眞理（KATORI MAKOTO）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：60202016

研究成果の概要：ランダム行列理論は乱数を成分とする行列の固有値分布を研究する理論である．本研究では固有値を粒子系の位置とみなす．得られる粒子系は，ランダム行列の固有値の間の強い相関を反映して，強く相互作用する多粒子系になる．ランダム行列理論を発展させ応用することにより，従来の方法では解析できなかった，強く相互作用する粒子系の時空相関関数を厳密に求めることに成功した．この結果は将来，パターン形成などの非平衡物性理論に応用することが可能である．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００５年度	1,100,000	0	1,100,000
２００６年度	1,000,000	0	1,000,000
２００７年度	700,000	210,000	910,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,500,000	420,000	3,920,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎
キーワード：ランダム行列理論，非平衡統計物理学，数理物理学，時空相関関数，特殊関数論，確率過程，厳密解

１．研究開始当初の背景
ランダム行列理論は，対称性を保ちながらも各成分がランダムに分布する行列の固有値分布を議論する理論であり，Wigner や Dyson によって，はじめは複雑な原子核のエネルギー・スペクトルを統計的に記述する近似理論として導入された．しかし近年は，リーマンのゼータ関数の零点分布やリー群の既約表現を表すヤング図形の分布といった純粋数学での重要な問題，量子色力学(QCD)の低エネルギーでの有効理論，弦理論の模型，超伝導素子と結合した量子ドットのエネルギー準位や量子細線の輸送現象などに関したメゾスコピック系の物性理論，量子カオス，量子可積分系，高分子ネットワークの分類など，さまざまな分野において応用され，発展を続けている．

２．研究の目的
申請者は，ランダム行列理論はある種の「平均場理論」としての役割を果たしていると考えている．ただし，通常の平均場理論は秩序

変数の対称性は正しく考慮するが，相互作用の効果は均してしまう．これに対してランダム行列理論では粒子(固有値)間に斥力的に働く２体の強い長距離相互作用を正確に記述することが出来るという著しい特色を持つ．場の理論でのゲージ場，統計力学でのエントロピー力（配置空間に対する物理的制限から生まれる有効的ポテンシャル）を表すランダム行列のユニタリー成分を一様な測度で積分してしまう(均してしまう)ことにより，多体相互作用が結果的に 2 体の長距離相互作用の和の形に纏められるという理論の枠組みは，その普遍性がために多くの分野で有効なのであろう．しかしながら，申請者の感想として，ランダム行列理論は 2 次元 Ising 模型のような特別な可解模型として認識されてきたように思う．本研究ではランダム行列理論を，物性研究の一般的な基礎理論としてさらに有効に使える形に整備することを目指す．

３．研究の方法

（１）ランダム行列の研究方法にはいくつかの異なる流儀がある．特に相関関数を計算する方法として，(A) 直交多項式系を構成して，ランダム行列を対角化してその逆行列を求めることによって問題を解く方法，(B) レプリカ・トリックとよばれる方法，(C) ボゾンとフェルミオンとの超対称性を議論するために開発された補助場の方法と超行列式などを用いる代数的手法を組み合わせた方法，などがある．例えば，ランダム行列の固有値の２点相関関数だけを求めたければ，(B) や (C) の方法の方が (A) の方法よりも容易に正しい結果を与えることが知られている．しかし，任意の多点相関関数を一般的に求めるには，(A) の方法に従って，表現の基底を与える直交関数系の構築をしなければならない．本研究はランダム行列理論を物性基礎論として位置づけるものである．物性基礎論とは統計力学の構成とその熱力学的極限の議論を系統的に行うことを意味する．そのため，相関関数は考えられるパターンすべてについて決定する必要が生じる．我々はこのため，研究の方法としてはもっとも面倒とされる (A) の方法を採用する．このため，特殊関数論に関する詳しい考察と最新の知識が必要となり，理論の構成には十分な時間をかける必要が生じる．

（２）ここで我々が考える統計力学は，従来の粒子系に対するものを拡張して，（時空平面上の粒子の軌跡が描く）曲線の統計集団に対して考えるものである．これはパターン形成など非平衡統計力学への応用を強く意識しているからであるが，研究を進める上では，確率過程論の応用が欠かせない．上述の（１）と同様に，従来の数学と物理学との垣根を越えて数学研究者と交流し，広くかつ深く知見を得て研究を遂行する必要がある．

本研究は従来の物性理論に比べて数理的な側面が強いが，これが本研究方法の特色になっている．

４．研究成果

（１）時間的に非斉次である確率過程であるミアンダー過程に非衝突条件を課すことによって定義される多粒子系を研究した．この系は 2 つの実パラメータを持つ．この 2 パラメータが特別な値をとる場合には，カイラル・ランダム行列模型という高エネルギー物理学（QCD の理論）で研究された模型のエネルギー分布や，メゾスコピック系の研究で Altland と Zirnbauer が導入した Bogoliubov -- de Genes 型ランダム行列を用いた超伝導ハイブリッド素子の模型の固有値分布が，粒子分布として実現される．その両者について，粒子配置（固有値分布）の時空相関関数がそれぞれ Forrester らと Nagao によって計算されているが，我々は 2 つのパラメータが取り得る全ての値に対して，時空相関関数を厳密に決定することに成功した．その結果はパフ形式で表されるが，それを指定する相関核は Riemann-Liouville の分数微積分で表されることを発見した．（項目 5 の雑誌論文⑦として発表.）我々の結果は，上述のようにこの分野の厳密解としては最高レベルのものであり，その背景となる行列式過程の解説を含めて，統計物理学の分野で世界的に最も権威のある学術雑誌である Journal of Statistical Physics に招待論文を依頼され，執筆した.（項目 5 の雑誌論文⑤として出版.）また，項目 5 の図書②で解説を行った．

（２）本研究はランダム行列理論という元々は複雑な量子多体系のエネルギー固有値の準位統計に対する理論を，相互作用する粒子系の統計力学理論として再考し，物性基礎論として発展させることにある．このためには，粒子系の初期配置依存性を詳しく調べる必要がある．この問題は，元来のランダム行列理論では，対称性の異なるランダム行列を結合させて模型を多層構造化する試み，あるいは「外場」を印加することによりランダム行列の対称性を変化させてその応答を見るという試みに対応するものであり，多くの研究者の関心事となっている．我々は，この問題を多重直交関数系の理論と結びつけることにより解決した．具体的には，非衝突ブラウン運動の時空相関関数は任意の初期配置に対して，多重エルミート多項式の双線形和で表される相関核で指定される行列式で表現できることを証明した.（項目 5 の学会発表②など，いくつかの研究集会で発表．）この結

果は論文として纏めて現在投稿中である．

（3）ランダム行列の理論を粒子系の統計物理の理論として考えると，行列のサイズが粒子数に対応する．統計物理学は粒子数を無限大とする無限粒子極限をとることにより，熱力学法則がミクロな模型から導出できることを主張する．従って，我々はランダム行列のサイズを無限大にする極限を詳しく研究する必要がある．上述のように，我々はランダム行列の時空相関関数を厳密に計算することに成功しているので，その結果を用いて，無限粒子極限（すなわち熱力学極限）を顕に議論することが出来る．この問題は，特殊関数の漸近解析という物理数学の伝統的な問題，リーマン・ヒルベルト問題とよばれる数学の問題，パンレベ方程式などに関係する可積分系の研究と関連するものであり，大変興味深いものである．我々は項目５の雑誌論文⑤，⑦，学会発表②などで公表したように，この問題を確率論的に定式化し，マルコフ過程に対するディリクレ形式によるアプローチとの関係を議論した．さらに，複素平面上の整関数の理論，特にその無限乗積表示との関係を見出した．ランダム行列理論を統計物理学の理論として位置づけようとする我々の「物理的な」研究は，面白いことに，問題の数学的な深さを明らかにすることに貢献した．

（4）ランダム行列理論を粒子系の確率過程として再考するという我々の研究は，統計力学の枠組みを拡張する試みでもある．従来の統計力学は粒子という点の運動の統計集団を考える．これに対して，我々の試みは，非衝突といった条件を課された粒子の軌跡の統計集団を考えることである．すなわち，点ではなく時空平面上の曲線の統計集団を取り扱うことになる．我々は，(1＋1 次元）時空平面上の非衝突拡散過程の軌跡の極値問題を研究した．これは，2 次元平面内の 1 次元界面の成長過程における乱れた界面の運動に対する統計法則を導くための理論研究である．我々の模型の軌跡の極値，例えば最大値の分布は，乱れた界面の揺らぎの幅の分布を記述できることが期待されるからである．

　ある時刻での粒子の位置の分布関数は，例えばガウス分布のように単純なものであっても，ある有限の時間区間での粒子の位置がある値以下である分布（つまり，時空平面上の粒子の軌跡が描く曲線が時空平面上のある領域にとどまる分布）を計算すると，全く非自明な関数が得られることが分かった．このことは１粒子の場合には，ガウス分布関数からヤコビの楕円テータ関数やその積分変換で与えられるリーマンのゼータ関数が得られることとして，すでに確率論の分野で知られていた．我々は項目５の雑誌論文③で報告したように，まず非衝突条件を課した２粒子の軌跡（時空平面上の２本の曲線）について詳しく研究した．その結果，その最大値分布は，リーマンのゼータ関数を拡張したものとして知られているディリクレの二重級数で表されることを明らかにした．興味深いことに，関連する問題が，グラフ理論における離散的な模型に対する組み合わせ論的な研究においてウィーン大学数学の Fulmek や Feierl によって研究されていることが分かった．2008 年に 2 度にわたり，ウィーン大学および Erwin Schroedinger Institute (ESI) に出向き，彼ら及び Krattenthaler 教授と議論することにより，この問題を３粒子以上の多粒子系（3 本以上の軌跡の曲線）に拡張する研究を開始することになった．その結果，項目５の雑誌論文①および学会発表③で発表した成果を得ることに成功した．すなわち，一般に N 粒子の非衝突拡散過程の軌跡の極値（最大値）分布関数はサイズ N の行列の行列式で表されること，その行列の成分は，ヤコビの楕円テータ関数の微分と関係する関数で与えられること，が明らかになった．ここで現れる行列式は，そもそものランダム行列の行列式とは違うオリジンを持つものであり，真に新しい発見である．同様の結果は同時期に，ウィーン大学の Feierl によって全く別の手法（組み合わせ論的な手法）で報告された．それだけでなくごく最近，その両者とも異なる手法（経路積分法）によってフランスのグループが同様の結果を報告するに至り，この分野の研究者の注目を集めることになっている．我々の論文①および③の波及効果は大きく，時空平面上の粒子の軌跡が描く曲線群の極値問題は，今後益々活発に研究がなされることが期待される．

（5）上記と共通する問題設定として，複素平面上の共形不変性をもつランダムな曲線の統計法則の研究が，最近確率論と統計物理学で盛んである．特に，Schramm-Loewner evolution (SLE)とよばれる共形写像のランダムな時間発展系に対する研究は重要であり，その中心的な研究者の一人である Werner は 2006 年に数学のノーベル賞として有名なフィールズ賞を受賞している．この SLE の理論はランダム行列理論と関係が深いことが予想される．そのため，SLE の基礎理論について整理し，項目５の雑誌論文④の形で日本物理学会誌上で解説した．さらに，項目５の学会発表①にあるように，日本数学会からは特別企画講演として招待を受け，レビュー講演を行った．

（6）ランダム行列は量子統計，特にフェル

ミ統計と関係が深い．そのため，量子コンピュータのアルゴリズムの数理模型として注目されている量子ウォーク模型は，ランダム行列理論の新しい応用分野として将来性が期待されている．我々はこの観点から，量子ウォーク模型について研究をした．特に擬速度とよばれる物理量の空間分布の長時間極限分布関数について厳密な結果を得ることに成功した．具体的には，１次元２成分模型の結果（項目５の雑誌論文⑧，学会発表④），１次元多成分模型の結果（項目５の雑誌論文⑥）及び２次元４成分模型の結果（項目５の雑誌論文②）を発表した．量子ウォーク模型を質量零の相対論的粒子であるワイル粒子の運動と関連付ける我々の視点はオリジナルなものであり，海外の場の理論研究者からも注目された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① N. Kobayashi, M. Izumi, M. Katori, Maximum distributions of bridges of noncolliding Brownian paths, Phy. Rev. E **78**, 051102/1-15, 2008, 査読あり
② K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori, N. Konno, Limit distributions of two-dimensional quantum walks, Phys. Rev. A **77**, 062331/1-9, 2008, 査読あり
③ M. Katori, M. Izumi, K. Kobayashi, Two Bessel bridges conditioned never to collide, double Dirichlet series, and Jacobi theta function, J. Stat. Phys. **131,** 1067-1083, 2008, 査読あり
④ 香取眞理，臨界現象・フラクタルの新世紀—SLE の発見--，日本物理学会誌，**62**, 527-531, 2007, 査読あり
⑤ M. Katori, H. Tanemura, Noncolliding Brownian motion and determinantal processes, J. Stat. Phys. **129**, 1233-1277, 2007, 査読あり
⑥ T. Miyazaki, M. Katori, N. Konno, Wigner formula of rotation matrices and quantum walks, Phys. Rev. A **76**, 012332/1-14, 2007, 査読あり
⑦ M. Katori, H. Tanemura, Infinite systems of noncolliding generalized meanders and Riemann-Liouville diffeintegrals, Probability Theory and Related Fields, **138**, 113-156, 2007, 査読あり
⑧ M. Katori, S. Fujino, N. Konno, Quantum walks and orbital states of a Weyl particle, Phys. Rev. A **72**, 012316/1-9, 2005, 査読あり

〔学会発表〕（計４件）

① 香取眞理，連続関数空間上の共形不変な確率測度と Schramm-Loewner Evolution，日本物理学会，2009 年 3 月 26 日，東京大学駒場キャンパス
② M.Katori, Noncolliding Brownian motions with arbitrary initial configuration and multiple Hermite polynomials, ESI Workshop on "Combinatorics and Statistical Physics", 2008 年 5 月 29 日，ESI, Vienna, Austria
③ M.Katori, Maximum height distribution of noncolliding Bessel bridges, ESI program on "Combinatorics and Statistical Physics", 2008 年 3 月 11 日，ESI, Vienna, Austria
④ 香取眞理，量子ウォークとワイル方程式，日本物理学会，2005 年 9 月 21 日，同志社大学

〔図書〕（計２件）

① 鈴木増雄，豊田正，香取眞理，飯高敏晃，羽田野直道，朝倉書店，統計物理学ハンドブック−熱平衡から非平衡まで−-，2007，597 ページ（410-545）
② 香取眞理，種村秀紀，遊星社，数理物理への誘い６（小嶋泉編），2006，231 ページ（148-175）．

〔その他〕
研究室ホームページで研究成果を公開
http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/

６．研究組織
(1)研究代表者
香取　眞理（KATORI MAKOTO）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：60202016
(2)研究分担者
なし
(3)連携研究者
なし