

令和 5 年 6 月 18 日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02693

研究課題名(和文) 初等中等教育における代数的思考とその表現に関するカリキュラムの開発と評価

研究課題名(英文) Development and Evaluation of Curriculum for Algebraic Thinking and its Representation in Elementary and Secondary Education

研究代表者

藤井 斉亮 (FUJII, Toshiakira)

東京学芸大学・教育学部・名誉教授

研究者番号：60199289

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,900,000円

研究成果の概要(和文)：初等中等教育段階において、「文字式」は一般性を表現できるが、数字を用いた「数字式」ではそれができない、という思い込みがある。だが、数学史をみると、文字表記が充実する前では、一般性を含意して論を展開する際は「数字式」を用いていた。本研究では、このような「数字式」において一般性を含意している数を擬変数と命名し、擬変数の機能に焦点をあて、新しい教材を開発し、同時に既存教材を擬変数の視点から精査・改良し、代数的思考と表現に関するカリキュラム試案を構築した。さらに小学校・中学校及び大学を対象に授業実践を行い、授業後の児童生徒学生及び教師への総合的調査からカリキュラム評価を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

国の内外を問わず、中等教育段階において、文字 a, x などを用いた「文字式」の学習は、算数から数学へ飛躍する際の壁であり、ここで多くの生徒が困惑し、数学嫌いになっている。にも拘わらずこの学習困難性に対してこれまで明確な改善指針が提言されていない。

本研究では、数学史において、文字表記が充実する前では、一般性を含意して論を展開する際には、「数字式」が用いられている事実に着目し、このような数を擬変数(quasi-variable)と命名し、擬変数を視点に新しい教材を開発した。また、既存のカリキュラムを精査・改良し、「数字式」から「文字式」に至るカリキュラム試案を構築した点が成果である。

研究成果の概要(英文)：At the elementary and secondary education level, there is an assumption that "literal symbols such as a, x " can express generality, while "numerical symbols" using numbers cannot. However, looking at the history of mathematics, before the development of written notation, "numerical formulas" were used to imply generality and to develop arguments. In this study, we named the numbers that imply generality in "numerical expressions" as "quasi-variables," focused on the function of quasi-variables, developed new teaching materials, and at the same time, examined and improved existing teaching materials from the viewpoint of quasi-variables to construct a curriculum proposal for algebraic thinking and expression. Furthermore, we conducted a comprehensive survey of students and teachers after the experimental lessons and evaluated the curriculum.

研究分野：数学教育学

キーワード：擬変数 初等代数 教材開発 授業研究 研究授業 問題解決型授業 文字式

1. 研究開始当初の背景

国の内外を問わず、中等教育段階において、文字 a, x などを用いた「文字式」の学習は、算数から数学へ飛躍する際の壁であり、ここで多くの生徒が困惑し、数学嫌いになっている。にも拘らずこの学習困難性に対してこれまで明確な改善指針が提言されていない。

教育現場の実態としては、小学校で「数字式」、中学校では「文字式」が用いられている。それは妥当と考えるが、この実態の背後に根本的に誤った考えがあると考えた。すなわち、「数字式」は具体的・個別的で、「文字式」は一般性を表現できるが、「数字式」ではそれができないという思い込みである。

だが、数学史をみると、文字表記が充実する前では、一般性を含意して論を展開する際は「数字式」が用いられていた。中村幸四郎は『数学史』の中で、このような数字を用いた表現に着目し、「準一般的(quasi-allgemein)な方法」と述べている(共立全書,1971,p.93)。本研究では、数字で表記されているが、一般性を内包している数を擬変数(quasi-variable)と命名した。この擬変数を「数字式」から「文字式」に至る指導に活かしたいというのが着想の原点である。

先行研究では、代数的思考とその表現の分野、とくに Early Algebra という研究分野名のもとで相当数の研究が見いだせるが、それらは総じて「文字式」のみに焦点があたっている。本研究では、算数数学を言語と捉え、言語指導の視点から「数字式」と「文字式」を一体的に捉えた長期的な指導を志向しており、ここに本研究の独自性がある。

「文字式」に焦点化した先行研究の中でも、ロシアの Davydov の影響を受けた米国ハワイ大学の MU プロジェクト等では小学校第一学年から「文字式」を導入しており、本研究とは対極の立場をとっている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、擬変数の機能に焦点をあて、新しい教材を開発し、同時に既存教材を擬変数の視点から精査・改良し、代数的思考と表現に関する授業設計及びカリキュラムを構築することである。さらに小学校・中学校及び大学を対象に授業実践を行い、授業後の児童生徒学生及び教師への総合的調査からカリキュラム評価を行うことである。

3. 研究の方法

擬変数の機能は、パターン発見問題などに顕在化することから、初等代数に関わる国内外の既存の教材を擬変数を視点に精査・分析する方法をとる。また、擬変数を視点にして新しい教材を開発する。これらの開発した教材を用いて、授業実践を行い、教材の評価およびカリキュラム開発に繋げていく。

授業実践とその成果研究においては、C. Kieran et al. (Early Algebra, ICME-13 Topical Surveys, Springer Open, 2016) が指摘するように、横断的・縦断的研究の何れにおいても、ごく一部の例外を除いて、そこでの授業は研究者自身が授業者か、または研究者の指示に従って現場教師が授業する形で行われている。本研究では、授業実践期間が長期的かつ日常的であることを踏まえ、現場教師主導による授業、しかも授業研究(Lesson Study)のシステムに組み込んだ授業実践とその成果研究を行う。ここにも本研究の独自性がある。

4. 研究成果

本研究で開発した教材は、「繰り下がりのある引き算は足し算で(ピーターの方法・あきら君の方法)」「足し算のきまり」「引き算のきまり」「かけ算のきまり」「わり算のきまり」「位の数を入れ替えた加減」「分数のわり算」「三角錐を二等分する問題」「マッチ棒の問題等のパターン発見問題」「円の接線の長さ(積一定の事象)」「直角三角形に内接する円」「直角三角形に内接する2つの円」「(平方数+1)の積」「フィボナッチ数列の和」である。

また、初等代数の視点から見た日本の教科書の良さは Tad Watanabe(2011)もすでに指摘しているが、現行教科書で用いられている数値を擬変数の視点から吟味し、日本の教科書では擬変数が随所にかつ適切に用いられていることを確認した。一方、教科書間の差異も見出され、教科書によっては擬変数の視点から見て改良すべき数値設定も見出された。また、例えば、小学校第一学年で $20+30$ を 10 の束が 2 つと 3 つで 10 の束が 5 つと処理する過程は、中学校第一学年で同類項を纏める処理 ($2a+3a=5a$) と同じとみて、その素地指導としてカリキュラム上に位置付けた。このような着想は、国内外においてこれまでなされておらず、本研究の成果であるが、このようなカリキュラムを実際の授業で実現することの難しさも判明した。すなわち、「意図したカリキュラム」から「実行したカリキュラム」への移行が容易ではなく、今後の課題となった。

擬変数の役割・機能を感じ得しうる教材を用いた授業実践は、コロナ禍では十分に実施できなかったが、オンライン型授業研究に代替えし、ある程度の成果を得ることができた。研究期間を延長し、令和4年度には海外研究協力者との対面型研究討議、および開発した教材を用いた授業実践の実際とそこでの擬変数から文字式への移行に関わる困難性や理解の様相について、英国での学会発表も行った。

< 引用文献 >

Kieran, C., Pang, J.S., Schifter, D., & Ng, S.F. (2016). *Early algebra ICME-13 topical surveys*. Springer Open.

Watanabe, T. (2011) A critical foundation for school algebra in Japanese elementary school mathematics, In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp.109-124). New York: Springer

中村幸四郎(1971) 『数学史-形成の立場から-』 共立全書, p.93

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 藤井斉亮	4. 巻 32号
2. 論文標題 擬変数の役割と機能：命題の発見過程に焦点を当てて	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 学芸大数学教育研究	6. 最初と最後の頁 15-24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 藤井斉亮 成田慎之介 清野辰彦	4. 巻 100
2. 論文標題 数学的問題解決における日米共通調査再考-「マッチ棒の問題」の解決における式表現と擬変数に焦点を当てて-	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本数学教育学会誌	6. 最初と最後の頁 2 - 15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Toshiakira FUJII
2. 発表標題 Roles of Quasi-variables in the Process of Discovering Mathematical Propositions
3. 学会等名 16th International Conference of The Mathematics Education for the Future Project (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 藤井斉亮先生ご退職記念論文集編集委員会、藤井斉亮	4. 発行年 2017年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 358
3. 書名 数学教育学の礎と創造：第一部 擬変数の役割と機能及びその理解の様相について	

1. 著者名 Huang, Rongjin (EDT)/ Helgevold, Nina (EDT)/ Lang, Jean (EDT); Akihiko Takahashi, Tad Watanabe, Naoko Matsuda and Toshiakira Fujii	4. 発行年 2023年
2. 出版社 Taylor & Francis Ltd	5. 総ページ数 288
3. 書名 Teacher Professional Learning through Lesson Study in Virtual and Hybrid Environments : Opportunities, Challenges, and Future Directions (Wals-routledge Lesson Study Series); Chapter 2 Potential of online experience of Lesson Study: Learning from the IMPULS efforts to provide research lesson observation online	

1. 著者名 Huang, Rongjin (EDT)/ Helgevold, Nina (EDT)/ Lang, Jean (EDT); Susie Groves, Toshiakira Fujii, Wanty Widjaja, Keiko Hino, Naoko Matsuda and Felicity Ames	4. 発行年 2023年
2. 出版社 Taylor & Francis Ltd	5. 総ページ数 288
3. 書名 Teacher Professional Learning through Lesson Study in Virtual and Hybrid Environments : Opportunities, Challenges, and Future Directions (Wals-routledge Lesson Study Series); Chapter 4 What can online lesson study offer? Findings from an Australian - Japanese collaboration	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	中村 光一 (NAKAMURA Koichi) (80225218)	東京学芸大学・教育学部・教授 (12604)	
連携研究者	太田 伸也 (OHTA Shinya) (50322920)	東京学芸大学・教育学部・名誉教授 (12604)	
連携研究者	西村 圭一 (NISHIMURA Keiichi) (30549358)	東京学芸大学・教育学部・教授 (12604)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	清野 辰彦 (SEINO Tatsuhiko) (00550740)	東京学芸大学・教育学部・教授 (12604)	
連携研究者	松田 菜穂子 (MATSUDA Naoko) (90625667)	東京学芸大学・教育学部・助教 (12604)	
連携研究者	高橋 昭彦 (TAKAHASHI Akihiko) (80625442)	東京学芸大学・教育学部・特命教授 (12604)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関