様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月２５日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｈ０２８３４

研究課題名（和文）保型形式論と二次形式論の研究

研究課題名（英文）Theory of automorphic forms and quadratic forms

研究代表者

池田　保（Ikeda, Tamotsu）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：２０２１１７１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　13,400,000円

研究成果の概要（和文）：ジーゲル級数はジーゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数に現れる重要な不変量である．本研究では二次形式のグロス・キーティング不変量とその精密化である拡大グロス・キーティング・データを研究し，ジーゲル級数の明示的な公式を与えた．応用として，ヒルベルト・ジーゲル保型形式のリフティングやアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の評価なども与えた．また，エルミート形式に対してもグロス・キーティング不変量の研究を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
整数論において，保型形式，とくにヘッケ作用素の同時固有形式の不変量を調べることは重要な課題である．筆者の過去の研究では一変数のヘッケ同時固有形式から高次のジーゲル保型形式へのリフティングが存在することを示したが，このリフティングはまたヘッケ同時固有形式となる．
本研究ではリフティングの研究で重要な役割を果たしたジーゲル級数を詳細に研究した．ジーゲル級数が二次形式のグロス・キーティング不変量とその精密化である拡大グロス・キーティングデータを用いて表すことができることを示し，その明示的公式を与えた．また，応用としてヒルベルトジーゲル級数のリフティングを与え，そのフーリエ級数の評価なども与えた．

研究成果の概要（英文）：The Siegel series is an important invariant appearing in the Fourier coefficients of the Siegel-Eisenstein series. In this research, we study the Gross-Keating invariants of quadratic forms and their refinement, namely the extended Gross-Keating data, and give an explicit formula for the Siegel series. As applications, we also gave lifting of Hilbert-Siegel modular forms and evaluation of the Fourier coefficients of Eisenstein series. We also studied the Gross-Keating invariants for Hermite forms.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式　二次形式　エルミート形式

１．研究開始当初の背景

筆者の 2000 年頃の研究により，一変数保型形式から２ｎ次のジーゲル保型形式へのリフティングが存在することが知られていた．このリフティングのフーリエ係数やアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数にはジーゲル級数という一種の特殊関数が現れるが，一般の局所体上ではその明示的な公式は与えられていなかった．Gross と Keating は二次形式の Gross-Keating 不変量を一般的に定義したが，その性質はあまりよくわかっていなかった．本研究ではこれらの問題点を踏まえて関連した問題を明らかにしようとした．

２．研究の目的

本研究課題の申請時における当初の研究目的について，以下に簡潔に記入する．

本研究の目的は，Arthur らによる古典群の保型表現論の進展を踏まえ，研究代表者が長年研究してきた保型形式のリフティング，保型形式の周期，被覆群上の保型表現の理論などを新たな見地から総合的にとらえようというものである．具体的には，被覆群上に定義される半整数の重さを持つ保型形式を用いることによりリフティングをより具体的に構成すること，相対跡公式を用いることによりリフティングの周期の明示的公式を与えることを主な目標にする．また，リフティングに密接に関連する問題として二次形式のSiegel 級数，局所密度などを考察する．2000 年前後，筆者は一変数の保型形式から高次のSiegel 保型形式を構成するリフティングの存在を示し，この方面の研究の発展に貢献した．これは現在ではDII リフト，または池田リフトと言われるSiegel 保型形式であり，そのFourier 係数には簡明な公式がある．この公式には半整数の重さを持つ保型形式のFourier 係数と二次形式のSiegel 級数が現れる．さらに筆者はHermite 保型形式に対しても同様のリフティングの存在を証明した．一方，宮脇予想とは宮脇伊佐夫により1992年に提唱された一変数の保型形式２つの組から３次のSiegel 保型形式へのリフティングに関する予想である．筆者はDII リフティングの応用として，DII リフティングの対角集合への制限を核関数に用いることにより，ある種の条件下でより一般的なリフティングが存在することを示した．これは高次のSiegel 保型形式に対する宮脇予想の一般化と考えることができる．このようにして，ある種の条件付きではあるが（一般化された）宮脇予想を部分的に解決することができた．さらに筆者はDII リフトまたは宮脇リフトとして得られる保型形式の周期について予想を提出した．この予想は現在でも一般には未解決だが，連携研究者の市野篤史により，齋藤・黒川リフトの対角成分への制限の場合が証明され，また高次のDII リフトの周期については連携研究者の桂田英典，河村尚明らによって解決された．また，Hermite 保型形式の場合にも，桂田がDII リフトの周期を計算し，筆者の予想を若干修正した形で証明している．当研究の目的の一つはこの理論のさらなる発展を追求することである．

一方，保型表現論では近年Arthur，Waldspurger，Ngo らにより著しい進展があった．Ngo により，いわゆる安定跡公式の基本補題が証明され，Waldspurger によるtransfer の存在などの結果などを組み合わせることにより，古典群のArthur 跡公式の安定化が可能になった．この結果として，古典群の保型表現と一般線形群の保型表現との間に対応があることが証明できる．これにより従来は知られていなかった保型的L 函数の性質を，一般線形群に移して議論できるなど，幅広い応用の可能性がある．筆者の構成したリフティングはArthur の跡公式を用いても扱うことができるが，Fourier 係数や周期に関する結果は直接には出てこない．跡公式は異なる群の上の保型表現の重複度の間の関係式を導くが，異なる群の上の保型形式の周期の間の関係式を導くには相対跡公式が必要となると考えられている．このようにArthur の跡公式から得ら

れる結果を用いて保型形式の周期に関する結果を導くには相対跡公式の研究が必要である．
1990 年代の初め，Gross とPrasad は特殊直交群の周期に関する一連の予想を提出した．これを精密化して，連携研究者の市野篤史と筆者は特殊直交群上の保型形式の周期をある種のＬ函数の値と具体的に関係付ける明示的な周期公式を予想として提出した．これは現在では市野・池田予想として広く知られており，保型形式の周期の理論の一つの大きな目標となっている．
市野・池田予想はユニタリ群に対しても定式化することができる．これに関してははN.Harris による研究がある．このユニタリ群に関する市野・池田予想の類似に関しては最近大きな進展があった．すなわち，ユニタリ群に関する市野・池田予想がある種の局所的条件のもとでW.Zhang により解決されたのである．この場合にも宮脇予想の場合と同じように（積分表示が知られていない）ある種のテンソル積Ｌ函数の特殊値が現れるのであるが，Zhang はこの困難を相対跡公式を用いることにより解決した．相対跡公式を用いることでユニタリ群上の保型形式の周期が一般線型群の周期を関連付けることが可能である．Zhangはこれにより問題を一般線型群の保型形式の周期の問題に帰着して予想を証明した．このような状況の下で，宮脇リフトの周期に関する予想を相対跡公式を用いることで解決できるのではないかと考えるのは自然なことである．また，筆者は，連携研究者の桂田英典との共同研究で二次形式のSiegel 級数や局所密度を研究している．Siegel 級数はSiegel Eisenstein 級数のFourier 係数に現れる不変量であるが，池田リフトのFourier 級数のFourier 係数の公式にも現れる．最近，研究代表者はSiegel 級数の関数等式を一般の局所体上で証明した．有理数体上の場合はSiegel 級数の明示的公式は，連携研究者の桂田英典によって与えられているが，一般の代数体上では明示公式は知られていない．桂田英典の明示公式は二次形式のJordan 分解を用いて記述されているが，その記述は特に剰余標数が２の場合に非常に複雑である．一方，行列のサイズが３以下の場合は桂田の公式はGross-Keating 不変量といわれる不変量を用いて簡明に記述できることが知られている．筆者と桂田英典の共同研究ではサイズが一般の場合にもSiegel級数がGross-Keating 不変量を用いて一般的に計算しようというものである．

３．研究の方法

筆者が従来研究してきたリフティングの研究を発展させ，新たなリフティングの構成をめざす．また保型形式の周期，リフティングとして得られる保型形式の周期などの研究を，相対跡公式などの道具を用いることにより，明示的な周期公式を得る可能性を追求する．さらに二次形式のGross-Keating 不変量を研究し，Siegel 級数や局所密度など，保型形式と関係が深い重要な不変量の性質を明らかにすることを目指す．この研究計画を遂行するために連携研究者をはじめとして多くの研究者と研究打ち合わせを行い，またいくつかの国内研究集会，国際研究集会を開催する．
筆者らの研究グループは 2010 年前後に特殊直交群の組(SOn+1; SOn) の上の保型形式の周期に関する Gross-Prasad 予想を精密化し，周期の具体的な明示公式を予想として定式化した（[研究業績 8]）．この予想のユニタリ群への類似は N. Harris によって与えられた．最近になって W. Zhang は相対跡公式を応用することにより N. Harris の予想を特別な場合に証明するプレプリントを発表した．相対跡公式は Arthur-Selberg の跡公式の球等質空間への一般化と考えられる．W.Zhang の用いた相対跡公式は Jacquet，Rallis らによって導入されたものである．この相対跡公式の一辺には Jacquet，Piatetski-Shapirom，Shalika による GLn+1 × GLn のＬ関数を表示する周期が現れる．この相対跡公式の適用については，尖点形式に対しては一定の成果があるといってよい状況であるが，一般に精密スペクトル展開を得るためには，より一般的な保

型形式の周期をも考察する必要がある．このような周期積分は一般には収束しないため，一般の位置にある保型形式に対して，周期の正則化を行う必要がある．連携研究者の市野篤史はこの問題を深く考察し，興味深い成果をあげている．このような周期の正則化を与えることにより相対跡公式を実際に適用可能な形に変形すれば実りある応用が期待できる．当初の Siegel 保型形式の場合の宮脇予想に適用できるかは現時点では定かでないが，Hermite 形式への類似に関する宮脇予想の類似を考えれば，その場合には適用できる可能性がある．
一方，最近筆者と連携研究者の平賀郁は総実代数体上の半整数の重さを持つ Hilbert 保型形式に対して Kohnen plus 空間を構成した．この空間は１変数の保型形式の場合と同じように，Fourier 係数を用いて特徴づけられる．１変数の場合には Kohnen plus 空間の元の Fourier 係数を用いて高次の Siegel 保型形式へのＤＩＩリフティングが構成できたので，総実代数体上の場合でも同様のことができないかと考えるのは自然なことである．しかし，１変数の場合と異なるのは，１変数の場合は Eisenstein 級数の Fourier 係数を調べることによりＤＩＩリフティングが構成できたのであるが，一般の総実代数体上ではそれができないと考えられる点である．実際，Eisenstein 級数は１つのパラメーターをもつので１変数の場合には話がうまくいくのであるが，一般の総実代数体上ではパラメーターの数が足りないために同様の手法は適用できないと考えられる．この困難を解決するには表現論的な方法を使って直接リフティングを構成する手法が有効であると考えられる，連携研究者の山名俊介との共同研究はこの方向で研究を進めている．連携研究者の桂田英典とは二次形式の Siegel 級数の明示公式の研究を行っているが，これに関連して研究代表者は Siegel 級数の関数等式を証明した．これは桂田が p 進数体上の二次形式に対して示していたものを一般の局所体上に拡張したものである．
研究代表者は，これまでに白馬整数論オータムワークショップ，整数論サマースクール，数理解析研究所保型形式シンポジウムなどの定期的に開かれている整数論，とくに保型形式関係の研究集会でオーガナイザーを務めるなどの活動を続けてきた．当研究組織の連携研究者は，多かれ少なかれ，これらを主催し発表し出席するなど，互いに深くかかわり，共に研究を続けてきたグループである．また，海外においても Pan Asian Number Theory Conference の organizing committee に加わるなど，整数論の発展のために尽力している．当研究組織の連携研究者らと今後も協力してこれらの活動を発展させたいと思っている．

４．研究成果
ジーゲル級数はジーゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数に現れる重要な不変量である．本研究では二次形式のグロス・キーティング不変量とその精密化である拡大グロス・キーティング・データを研究し，ジーゲル級数の明示的な公式を与えた．応用として，ヒルベルト・ジーゲル保型形式のリフティングやアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の評価なども与えた．また，エルミート形式に対してもグロス・キーティング不変量の研究を行った．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名	4．巻
Tamotsu IKEDA & Shunsuke YAMANA	53
2．論文標題	5．発行年
On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms	2020年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.	1121-1181
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.24033/asens.2442	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
T. Ikeda and H. Katsurada	140
2．論文標題	5．発行年
On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field	2018年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Amer. J. Math.	1521-1565
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1353/ajm.2018.0046	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　1件／うち国際学会　4件）

1．発表者名
T. Ikeda
2．発表標題
An explicit formula for the Siegel series
3．学会等名
Representation theory of reductive Lie groups and algebras（招待講演）（国際学会）
4．発表年
2018年～2019年

1．発表者名
T. Ikeda
2．発表標題
Hilbert-Siegel modular forms on adele groups
3．学会等名
21st autumn workshop on number theory
4．発表年
2018年

１．発表者名
T. Ikeda

２．発表標題
Algebraic automorphic forms and Hilbert-Siegel modular forms

３．学会等名
21st autumn workshop on number theory

４．発表年
2018年

１．発表者名
T. Ikeda

２．発表標題
Gross-Keating invariants of Hermitian forms

３．学会等名
Pan Asia Number Theory Conference 2018

４．発表年
2018年

１．発表者名
池田保・桂田英典

２．発表標題
On the Gross-Keating invariant for hermitian forms

３．学会等名
保型形式の解析的・数論的研究（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Tamotsu Ikeda

２．発表標題
On the Gross-Keating invariant of a quadratic form and its application to Siegel series

３．学会等名
Automorphic forms and related topics（国際学会）

４．発表年
2017年

1．発表者名 Tamotsu Ikeda
2．発表標題 On the Gross-Keating invariant of a quadratic form and its applicationto Siegel series
3．学会等名 Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics（国際学会）
4．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	桂田　英典 (Katsurada Hidenori) (80133792)	室蘭工業大学・大学院工学研究科・名誉教授 (10103)	
連携研究者	市野　篤史 (Ichino Atsushi) (40347480)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	
連携研究者	山名　俊介 (Yamana Shunsuke) (50633301)	大阪公立大学・大学院理学研究科・教授 (24405)	
連携研究者	平賀　郁 (Hiraga Kaoru) (10260605)	京都大学・理学研究科・講師 (14301)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計2件

国際研究集会	開催年
アジア地域における数論研究（Pan Asian Number Thoery Conference）	2021年～2021年

国際研究集会	開催年
21st Autumn Workshop on Number Theory	2018年～2018年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関