

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02842

研究課題名(和文)射影多様体の小林擬距離と高次元ネヴァンlinna理論の研究

研究課題名(英文) Kobayashi pseudo-distance on projective varieties and higher dimensional Nevanlinna theory

研究代表者

山ノ井 克俊 (Yamanoi, Katsutoshi)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：40335295

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究期間内に実施した研究成果の概要は以下のとおりである。アーベル多様体の一般型部分代数多様体の擬小林双曲性を証明した論文が2020年JMSJ論文賞を受賞した。この成果を準アーベル多様体の部分多様体の場合に一般化する研究を行なった。さらに、アーベル多様体から豊富因子を除いた空間が小林双曲的であることを証明した。また、B. Cadorel、Y. Deng両氏と共同で、基本群が半単純代数群への表現をもつ場合に、その多様体の双曲性に関する研究を行った。これらの成果は準射影多様体の双曲性に関する理解を深めるうえで重要である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究期間内に実施した研究及びその成果の学術的意義や社会的意義は以下の通り。学術的には、(準)アーベル多様体の部分代数多様体やその豊富因子の補集合における擬小林双曲性の研究は、長い歴史をもつ、代数幾何学や複素幾何学の重要な問題の一つであり、これらの理論の発展に貢献する。また、準射影代数多様体の基本群の表現の性質とその多様体の性質の関連は複素幾何学における基本的な問題である。社会的には、数学は科学や技術の基盤となる学問であり、数学の発展は科学技術の進歩に寄与してきた。したがって、上記の研究は数学の学術的な発展の一歩となり、それを通して社会的意義を持つものである。

研究成果の概要(英文)：The following is a summary of the research conducted and the results obtained within this research period. First, we received the 2020 JMSJ Paper Award for our paper proving pseudo Kobayashi hyperbolicity of subvarieties of general type on Abelian varieties. This research was carried out to the case of subvarieties of semi-abelian varieties. In collaboration with B. Cadorel and Y. Deng, we also studied the hyperbolicity of quasi-projective varieties whose fundamental groups admit representations on semi-simple algebraic groups. These results are important for a better understanding of hyperbolicity of quasi-projective varieties.

研究分野：数学

キーワード：準射影多様体の双曲性 高次元ネヴァンlinna理論 基本群の線形表現 アーベル多様体

1. 研究開始当初の背景

種数が2以上のコンパクトリーマン面は双曲的である、という古典的な事実は、現代でも多様な文脈で位置づけることができる重要な定理である。この問題の本質は、単位円板 D から代数多様体 X への正則写像全体 $\text{Hol}(D, X)$ の構造であり、高次元ネヴァンリンナ理論は正則写像 $D \rightarrow X$ と X 上の因子との交差理論を与える。このような問題は、数体 k 上の射影多様体 X の有理点 $\text{Speck } X$ 全体の構造を研究するディオファントス幾何学と多くの類似性を持つことが Lang、Vojta らによって観察されていた。特に Vojta は、高次元ネヴァンリンナ理論と数論的な交差理論であるアラケロフ幾何との極めて精密な類似性を指摘していた。このように正則写像全体 $\text{Hol}(D, X)$ の構造の研究は、複素解析、代数幾何、数論とも密接に関連する、現代幾何学の1つの興味深いフロンティアをなしており、このような学際性を意識しつつ、代数多様体上の小林擬距離の振る舞いについての理解を深めること、及び、そのために必要となる高次元ネヴァンリンナ理論の研究が求められていた、というのが本研究開始当初のおおまかな背景である。この内容を敷衍してもう少し詳しく述べたい。1960年代に小林昭七氏は、双曲的リーマン面上のポアンカレ距離の性質を抽象化して、一般の複素多様体上に小林擬距離を導入した。この擬距離は、双曲的なリーマン面上ではポアンカレ距離と一致するが、双曲的でないリーマン面上では、恒等的に0に退化する。高次元の複素多様体では、小林擬距離は、正である場所と退化する場所があり得るため、1次元の場合よりも複雑な振る舞いをする。小林擬距離が常に正であるような複素多様体は小林双曲的とよばれ、複素幾何学の主要な研究対象の一つとなっている。一方で、射影多様体が一般型であっても、その中に有理曲線や楕円曲線を含むと、そこで小林擬距離は退化して、小林双曲的にならない。そこで、ほぼ小林双曲的であるが、もう少し弱い条件、すなわち、ある薄い除外集合の外で小林擬距離が正であるような代数多様体を擬小林双曲的とよぶ。本研究課題をリードしていた基本的な問題意識は、小林昭七、Lang 両氏によって立てられた、「一般型代数多様体は、擬小林双曲的である」という予想であった。この予想は、小林擬距離の研究における最重要課題の一つであるが、同時に困難な課題でもある。実際、本研究課題開始直前までは、この予想を裏付けるのは、1920年代になされた、Bloch、Cartan による代数的トラス内の対数的に一般型なある種の準射影代数多様体に関する古典的研究、及び McQuillan によるある種の一般型代数曲面の研究など、ごく少数に限られていた。一方で、当該研究者は、本研究課題が開始される時期と前後して、アーベル多様体の部分多様体については、小林・Lang 予想が成立することを証明していた。アーベル多様体の一般型な部分多様体が、部分アーベル多様体の平行移動を含まなければ小林双曲的であることは、1980年代に Green によって証明された古典的事実であるが、部分アーベル多様体の平行移動を含むときには、擬小林双曲的か、ということは、それまで当該分野の専門家の間で話題にされてきた未解決問題であった。当該研究者のこの研究において、高次元ネヴァンリンナ理論は主要な役割を果たすものであったが、従来の高次元ネヴァンリンナ理論は、複素平面全体から準射影多様体への正則写像を主に扱っていたが、ここでは単位円板からの正則写像を扱ったところが大きく異なる。ここが、本研究課題において、高次元ネヴァンリンナ理論を用いて、小林擬距離の研究をさらに推し進められると、申請者が判断した要因であった。以上が、本研究課題開始当初の背景である。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、「一般型代数多様体は、擬小林双曲的である」という小林・Lang 予想を高次元ネヴァンリンナ理論の立場から研究すること、あわせて関連する高次元ネヴァンリンナ理論の第二主要定理型評価式を研究することであった。特に、アーベル多様体から豊富因子を除いた準射影多様体は小林双曲的であることを証明することは、大きな目的の一つであった。当該研究者は、野口潤次郎（東大名誉教授）、J.Winkelmann（独 Bochum 大学教授）両氏とも共同しながら、複素平面全体で定義された、準アーベル多様体をターゲットとする正則写像の場合に、高次元ネヴァンリンナ理論における主要な研究テーマである、いわゆる第二基本予想を証明した。さらに、当該研究者はこの結果を、アルバネーゼ次元最大の射影多様体への、複素平面の有限分岐被覆面からの正則写像に関する定理に一般化した。ここで、アルバネーゼ次元最大の射影多様体とは、その次元が、アルバネーゼ写像の像の次元と等しいものである。それは、アーベル多様体を含み、射影多様体の分類理論で重要な役割を果たす。本研究課題に関わる、重要な未解決問題は、単位円板からアーベル多様体への正則写像に対して第二基本予想を証明すること、さらにそれを単位円板上の有限分岐被覆面から、アルバネーゼ次元最大の射影多様体への正則写像に一般化することであった。また、研究開始当初の背景でも記したように、当該研究者はアーベル多様体の部分多様体に対して、小林・Lang 予想を証明した。この結果を非コンパクトな場合に拡張して、準アーベル多様体の部分多様体の場合に小林・Lang 予想を考察することも重要な研究目的であった。これらの、アーベル多様体から豊富因子を除いた空間、および準アーベル多様体の部分多様体は、非コンパクトな代数多様体であるため、双曲性に関する従来の主な研究指針である、Brody の補題を通して整正則曲線の場合に帰着する手法が適用できない。そのため、単

位円板からの正則写像全体の空間 $\text{Hol}(D, X)$ を扱う必要が生じるところが、主な困難である。本研究課題の重要な目的は、このような対象を研究するために必要となる高次元ネヴァンリンナ理論の研究を推進することである。さらに、その過程で得られた成果を、複素多様体の一意化理論など、他のテーマへの応用を試みることも、研究の目的であった。

3. 研究の方法

研究目的を達成するための研究方法は、当該研究者がこれまで研究してきた高次元ネヴァンリンナ理論を精密化したうえで、拡張を行うことであった。すなわち、従来は複素平面全体から射影多様体への正則写像、という枠組みで行われてきた研究を、単位円板から射影多様体への正則写像という枠組みに発展させる。その際に最も重要となるのは、ネヴァンリンナ理論における諸々の定数が、正則写像そのものには依存しないような、一様なネヴァンリンナ理論を構築することであった。申請者は、アーベル多様体の部分多様体に対する小林・Lang 予想を証明したが、その際に、このような一様なネヴァンリンナ理論の構築に一部で成功していた。その際の研究方針は、本研究課題の研究手法の立案において重要な役割を果たしていた。より具体的には、アーベル多様体 A から豊富因子 E を除いた準射影多様体 $A-E$ の小林双曲性の証明に向けた高次元ネヴァンリンナ理論の研究を行った。すなわち、単位円板 D からの正則写像 $D \rightarrow A-E$ に対して、高次元ネヴァンリンナ理論における主要なテーマである、第二基本予想を証明することが、まずは大きな目的だった。そのための研究方法として重要な指針となったのは、当該研究者による、複素平面全体 C からの正則写像 $C \rightarrow A$ に対する第二基本予想を証明した、野口潤次郎（東大名誉教授）J. Winkelmann（独 Bochum 大学教授）両氏との共同研究において、その第二基本予想の応用として、 $A-E$ の Brody 双曲性に関する、Siu-Yeung の定理（Math. Ann., 306 巻, 1996 年）の別証明を与えていたことである。この成果を、単位円板からの正則写像 $D \rightarrow A-E$ に対して一般化する、という方法で研究をおこなった。その際の課題、すなわち、定義域を複素平面全体から単位円板に変更することで、何が問題になり、何が新しく必要になるのか簡単に述べることで、本研究課題の研究の方法をより具体的に述べたい。まず、複素平面全体からの正則写像に対する、高次元ネヴァンリンナ理論を用いた、Brody 双曲性導出の典型的な議論の概略をふりかえることにする。まず、複素平面全体を半径無限大の円板と考え、そこからの正則写像の振る舞いを調べるために、いったん半径 r の円板上に制限して正則写像の増大度に関する評価を求める。これが、しばしば第二基本予想の役割になる。この評価は、様々な評価を続けた後、最終的には、 $(r$ の関数としての正則写像の増大度) $\leq (r$ の関数としての誤差項) $+ (定数)$ という形をとる。ついで、半径 r をどんどん大きくしていくことで、左辺の増大度が右辺の増大度を超過してしまうことを観察し、ある十分大きな半径 R では、この評価が成立し得ないことから、求めたい結果である Brody 双曲性を得るのである。この議論の過程を見ると、実は正則写像は半径が無限大の円板上で定義されている必要はなく、議論を成り立たせるに足るだけ、十分大きな半径 R の円板上で定義されていればよいことが分かる。この事実が、本研究課題の研究手法の重要なポイントである。しかしながら、もちろん問題はそれほど簡単ではない。その理由は、既存の高次元ネヴァンリンナ理論の諸成果に含まれる諸々の定数が、ほとんどの場合に正則写像そのものにも依存してしまっているため、上記の議論を成り立たせるために必要な十分大きな半径 R までが、正則写像に依存してしまうことに起因する。では、この諸々の定数は何に依存することを許すのか？実は、それは正則写像による、複素平面の原点の像（初期値）と、その微分（初期速度）だけに依存するような形にしておく必要がある。従って、諸々の定数が正則写像の初期値と初期速度だけに依存し、その他のデータには依存しない、一様なネヴァンリンナ理論が必要であった。一方で、高次元ターゲットである射影多様体への、円板からの正則写像である曲線の振る舞いを詳しく調べるには、しばしば高階の微分をとる必要がある。ここが主要な問題点であった。

4. 研究成果

本研究期間内に実施した研究成果は以下のとおりである。まず、アーベル多様体の一般型部分代数多様体の擬小林双曲性を証明した論文が 2020 年 JMSJ 論文賞を受賞したことは特筆に値する。次に、本研究課題での大きな目標の一つであった、アーベル多様体 A から豊富因子 E を除いた準射影多様体 $A-E$ の小林双曲性の証明に成功した。これは 1970 年代から、小林双曲性に関する基本的な問題として話題となっていたものの、永らく未解決であったものである。1990 年代に、 $A-E$ の Brody 双曲性に関する、Siu-Yeung の定理が得られていたが、その後 30 年近く進展のないままであった。本研究では、上記の研究手法で述べた通り、諸々の定数が正則写像の初期値と初期速度だけに依存し、その他のデータには依存しない、一様な高次元ネヴァンリンナ理論の精密化、という方針に沿って、画期的な成果を得ることが出来た。また、アーベル多様体の一般型部分代数多様体の擬小林双曲性を証明した成果を準アーベル多様体の部分多様体の場合に一般化する研究を行なった。これを、小林擬距離の研究という枠組みより、さらに広く Bloch 原理という立場から研究した。Bloch 原理というのは、1920 年代に Bloch が提唱した、複素解析学の研究を行う上での指導原理で、大雑把に言うと、全複素平面全体で成立する性質があるとき、それに対応する有限円板上での性質の帰結として導くような、有限円板上での性質を探究する、というものである。例えば、19 世紀に得られた、ピカールの小定理とそれを一般化した Borel の定

理を、1920年代に Bloch と Cartan は有限円板上の結果に拡張する研究を行っている。本研究課題に直接関係するところでは、1980年代に野口潤次郎氏は準アーベル多様体の中の整正則曲線のザリスキー閉包は準アーベル部分多様体の平行移動であることを証明し、それが Borel の定理の一般化であることを指摘した。本研究課題では、Bloch 原理に基づいて、この野口潤次郎氏による結果に対応する、単位円板上での結果を研究した。このような研究では、そもそも単位円板上での対応する主張がどのようなものであるかが明らかでない。本研究課題においては、その単位円板上の主張は、準アーベル多様体の部分多様体に対する小林・Lang 予想を導くこと、および Bloch と Cartan の古典的な結果を精密化するものであることを要請することとした。本研究課題の成果としては、その主張がどのようなものであるかを特定し、かなりの部分で証明に成功することが出来た。また、別の研究成果として、複素多様体の一意化に関するものが挙げられる。すなわち、B. Cadorel, Y. Deng 両氏との国際共同研究を行い、半単純代数群への big かつザリスキー稠密な表現をもつような準射影代数多様体の双曲性に関する研究を行った。具体的には、そのような準射影多様体には、除外集合となる、真部分代数多様体が存在して、その除外集合に含まれない部分代数多様体は対数的に一般型になり、さらには、その除外集合に含まれないような穴あき円板からの正則写像は、その穴を超えて正則に拡張される、という命題を研究した。このような研究には、準射影多様体の基本群の線形表現についての理解と、高次元ネヴァンリンナ理論の研究が必要となる。特に準アルバネーゼ次元最大である準射影多様体への、穴あき円板の有限分岐被覆からの正則写像、という設定でのネヴァンリンナ理論を研究した。これは「研究の目的」の項で述べたように、当該研究者はターゲットの多様体がコンパクトな場合に、複素平面全体の有限分岐被覆の場合に行った研究の一般化になっている。本研究課題では、この一般化した状況で行うことで、準アルバネーゼ次元最大かつ対数的に一般型な準射影多様体 X に対しては、ある真部分ザリスキー閉集合 Z が存在して、 Z に含まれない X の部分代数多様体は対数的に一般型であること、また穴あき円板から X への正則写像は Z に像が含まれなければ、その穴を超えて正則に拡張される、という大ピカル型定理を証明した。また、半単純代数群への non-rigid な線形表現から、非アルキメデス的に非有界な線形表現を構成する研究を行い、これを big という重要な仮定を保存したまま構成できることを証明した。これらの研究は、当該の準射影多様体の双曲性に関する研究で重要な役割を果たすことになるものである。以上のような成果が、国際共同研究によって得られた。ここで、本研究課題において、当初予期していなかったことについて述べておきたい。上記の国際共同研究において、重要な役割を果たすのは、準射影多様体の基本群が単純代数群へのザリスキー稠密な表現が与えられた際に、その多様体の普遍被覆空間から Bruhat-Tits ビルディングへの調和写像に関する、ごく最近の D. Brotbek, G. Daskalopoulos, Y. Deng, C. Mese による研究成果であった。特に、スペクトラル被覆上で得られる正則 1 形式が境界因子まで対数的に拡張される、という成果は素晴らしいものであった。当該研究者は、10 年以上前にコンパクトな射影多様体に関して、その基本群の線形表現と双曲性の研究を行っていた。一方でコンパクトな射影多様体の基本群の線形表現よりも、非コンパクトな準射影多様体の基本群の線形表現の方が、より汎用性の高い対象であるため、その当時から準射影多様体に対する一般化は一つの問題として意識していた。今回、上記の 4 名の方々による画期的な研究成果によって、このように研究が進展することになったことは、本研究課題が始まった時には予期していないことであった。残念ながら、本研究課題実施期間は、世界的な感染症拡大のため、ほとんど出張が行えない状態であったが、代わりに Zoom などのオンライン会議が普及したことは、気軽に海外の研究者とディスカッションを行う、別の可能性を感じさせるものであった。実際、今回の国際共同研究では、Zoom によるディスカッションや、クラウドを利用した共著論文の執筆など、新しい形の国際共同研究を行うこととなった。これも、本研究課題が始まった時には予期していないことであった。ただ、一方で、出張や海外研究者の招へい、国内研究集会の開催などは、より直接的で広範囲の研究者との交流をもたらすものであり、その重要性は今後も変わることはないと思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Katsutoshi Yamanoi	4. 巻 2120
2. 論文標題 On strong second main theorem type conjecture in higher dimensional Nevanlinna theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 228-237
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Katsutoshi Yamanoi	4. 巻 71
2. 論文標題 Pseudo Kobayashi hyperbolicity of subvarieties of general type on abelian varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 259, 298
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/75817581	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsutoshi Yamanoi	4. 巻 58
2. 論文標題 Kobayashi hyperbolicity of the complements of ample divisors in abelian varieties	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 281, 309
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/58-2-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 山ノ井克俊
2. 発表標題 正則写像の値分布理論の最近の話題から
3. 学会等名 第67回幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山ノ井克俊
2. 発表標題 強い形の第二主要予想についての一考察
3. 学会等名 「等角写像論・値分布論」合同研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Katsutoshi Yamanoi
2. 発表標題 Kobayashi hyperbolicity of the complements of ample divisors in abelian varieties
3. 学会等名 Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katsutoshi Yamanoi
2. 発表標題 Hyperbolicity problems for the complements of ample divisors on abelian varieties
3. 学会等名 第23回複素幾何シンポジウム（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山ノ井克俊
2. 発表標題 正則写像の値分布論に関する話題から
3. 学会等名 2021年日本数学会秋季総合分科会 企画特別講演（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Institut Elie Cartan de Lorraine			