

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 4 月 20 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02861

研究課題名(和文) 古典および量子統計的システムにおける新規な情報幾何構造の探究

研究課題名(英文) Exploring novel information geometrical structures in classical/quantum statistical systems

研究代表者

藤原 彰夫 (Fujiwara, Akio)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30251359

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,300,000円

研究成果の概要(和文)：古典および量子統計的システムにおける新規な情報幾何構造を探究するため、以下の研究をおこなった。1) 量子局所漸近正規性の研究、2) Chentsovの定理の拡張、3) 単調量子計量の双対平坦化、4) ランダム量子トモグラフィの情報幾何、5) オンライン機械学習におけるノイズ誘起型学習停滞現象の解明、6) 適応的量子パラメタ推定理論の実験的検証。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率分布の集まりが内包する自然な微分幾何構造の研究に端を発する情報幾何学は、1980年代前半に基本的枠組みが提唱されて以来、様々な分野で輝かしい応用展開がなされてきたが、その理論体系自体は未だ発展途上である。本研究では、量子統計的漸近理論やランダム力学系など、従来の情報幾何学では扱われなかった新規な研究テーマに挑戦し、いくつかの方向性において情報幾何学を実質的に深化させることができた。

研究成果の概要(英文)：Aiming at exploring novel information geometrical structures in classical/quantum information systems, we studied the following: 1) Theory of quantum local asymptotic normality, 2) Extensions of Chentsov's theorem, 3) Dually flattenable structures of monotone quantum metrics, 4) Information geometry of randomized quantum tomography, 5) Noise induced plateau phenomena in on-line machine learning, 6) Experimental demonstration of adaptive quantum state estimation theory.

研究分野：数理工学

キーワード：情報幾何学 統計多様体 局所漸近正規性 ランダム力学系 非可換Lebesgue分解 量子トモグラフィ
Chentsovの定理 機械学習

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

確率分布の集まりが有する自然な微分幾何構造の研究に端を発する情報幾何学は、1980年代前半に基本的枠組みが提唱されて以来、統計的推論、情報理論、学習理論、システム理論、脳科学などの様々な分野で輝かしい応用展開がなされてきた。しかし、その理論体系自体は未だ発展途上であり、たとえば採率を有する非平坦統計多様体や無限次元多様体の研究など、重要な未解決問題が数多く残されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、操作的意味づけを許容する非平坦/無限次元の統計多様体の性質を探究しつつ、従来の情報幾何学では扱われなかった新規な研究対象を発掘することにある。そして、解析および代数的方法を補完する第三の方法論として、統計数学における幾何学的方法の体系化を目指す。

3. 研究の方法

本研究では、情報幾何構造の公理的特徴づけおよび確率論の操作的基礎づけという2つの長期的方向性を見据え、古典/量子状態空間の幾何構造の研究を具体例に即して推進するとともに、これまで状態空間の存在を前提に構築されてきた情報幾何学を、より柔軟な体系上で構築することにも挑戦する。具体的には、局所漸近正規性に付随する幾何構造、およびランダム力学形における統計的推定問題を2大テーマとして位置づけて研究を推進する。またこれと並行して、情報幾何学がこれまで扱ったことのない新規な研究テーマを発掘し探究していく。

4. 研究成果

(1) 量子局所漸近正規性の研究：LeCam型の局所漸近正規性(Local Asymptotic Normality: LAN)の理論を量子統計的モデルに拡張する試みは、Gutaらによって群の表現論や作用素代数的テクニックを用いて始められたが、彼らの定式化はi.i.d.モデルにしか適用できないなどの制約が多く、一般性や汎用性の観点から満足いくものではなかった。一方、研究代表者らは、量子分布収束の概念に基づく量子局所漸近正規性(quantum LAN: q-LAN)の理論の定式化を先行研究で提案していた。この定式化の鍵は、対数尤度比の非可換拡張を全く新規に導入したことであったが、適用範囲が相互絶対連続性を有する量子統計的モデルに制限されるなど、こちらも満足いくものではなかった。こうした背景の下、本研究ではまず、量子相互絶対連続性を超えた枠組みへの拡張を目指し、Lebesgue分解定理の全く新しい非可換拡張を定式化した。そして、これをベースに非可換contiguity理論の研究に着手し、LeCamの第3補題の非可換拡張の導出に成功した。本研究成果は、q-LANの適用範囲を本質的に拡張するものであり、古典数理統計学の成果をほぼ完全に包含するものとなっている。本研究ではさらに量子漸近的表現定理の研究にも着手し、量子統計学における超有効推定量を排除するための条件を明らかにする足がかりを得た。

(2) Chentsovの定理の拡張：Chentsovの定理は、有限標本空間上の(古典)確率分布空間のMarkov埋め込みに関する幾何構造の不変性を満たす計量とアファイン接続を特徴づけるものである。Chentsovの定理を無限標本空間上の確率測度空間に拡張する試みとしては、PistoneらによるOrlicz空間を表現空間とする定式化などがあったが、いずれも技術的にやや込み入っていた。一方、Amari and Nagaokaの教科書では、無限標本空間の粗視化を介した定式化の可能性が示唆されていたが、それが数学的厳密さをもって実現されたことはこれまでなかった。こうした背景の下、本研究では、連続な確率密度関数をもつ統計的モデルに対して彼らのプログラムを実行し、有限分割からなる事象系となる有向族に関する極限操作を用いてFisher計量と接続を特徴づけるための十分条件(正則性条件)を明らかにした。本研究成果は、統計学における多くの基本的モデルをカバーするものであり、情報幾何学の誕生の端緒ともなった幾何学的着想を正当化するという意味で、情報幾何学における基本的結果の一つとみなすことができる。

(3) 単調量子計量の双対平坦化：Petzによる単調量子計量の特徴付けは、古典情報幾何学におけるFisher計量と接続の絶対的優位性を意味するChentsovの定理の量子版の確立に向けての重要なステップであると考えられている。このため、従来の量子情報幾何学では、単調量子計量と混合型接続を出発点として双対幾何構造を導入するのが標準的な方法であった。これに対し本研究では、混合型接続自体を絶対視せず、与えられた単調量子計量が何らかの双対平坦構造を許容するかという問題を研究した。その結果、Hilbert空間が2次元という特殊な場合ではあるが、すべての単調量子計量が双対平坦構造を許容するという予想外の結果を証明することができた。

(4) ランダム量子トモグラフィの情報幾何：量子トモグラフィは、量子光学や量子コンピュータの実験において標準的に用いられている量子状態推定方法である。本研究では、その統計的性質を、情報幾何学の観点から精密に評価した。d次元量子系の表現空間が相互不偏性条件を満たす(d+1)組の正規直交基底を持つと仮定する。このとき、各正規直交基底が生成する射影的測定をランダムに混合した測定を、ランダム量子トモグラフィという。本研究ではまず、相互不偏基底全体が量子状態空間の基底をなし、それに対応する展開係数(仮に α とする)とランダム化の比率(仮に s とする)を統合した実数の組(α, s)が、測定結果の確率分布を表す d(d+1)次元ベクトル全体空間 P の座標系をなすこと、 α を固定した e-自己平行部分多様体 $E(\alpha)$ と、 s を固定した m-自己平行部分多様体 $M(s)$ は、標準 Fisher 計量に関する P の直交葉層化を与えることを示した。さらに、測定値から最尤推定値を求める操作は、標準 Fisher 計量に関する単純な m-射影ではなく、測定値に対応する経験分布が属する葉 $M(s)$ ごとに定まる変形 Fisher 計量に基づく m-射影となることを明らかにした。本研究は、数学的に新規な情報幾何構造を明らかにしただけでなく、実験現場において最尤推定値を高速に計算するアルゴリズムも与えるものである。

(5) オンライン機械学習におけるノイズ誘起型学習停滞現象：従来の機械学習の研究では、大きなサイズのバッチ学習を念頭に置き、平均化された勾配力学系を用いて学習過程を捉え、ノイズの影響は平均化された軌道の周りでのランダムな揺らぎとして捉える描像が主流であった。これに対し本研究では、Fukumizu and Amari により提唱された極小3層パーセプトロンを学習モデルとして採用し、それが内包する Milnor 型アトラクタ近傍での学習挙動をランダム力学系の観点から研究した。その結果、a)多重に縮退した部分空間がアトラクタ近傍に存在すること、b)学習データに内在する確率構造に由来する強いプラトー現象が生じること、そして c)当該部分空間から脱出するための最適なノイズの大きさが存在すること、などを見出した。これらの発見は、従来の平均化された決定論的勾配力学系では起こり得ないオンライン学習特有の現象であり、本研究で初めて明らかにされた新規なノイズ誘起現象である。

(6) 適応的量子パラメタ推定理論の実験的検証：量子情報科学における情報幾何学的方法の新たな展開を図るため、量子光学の実験物理学者との共同研究を行い、光子の偏光方向が時間的にゆっくりと変動する状況において、当該偏光方向を時間的に追尾する量子推定問題を研究した。その結果、量子 Cramer-Rao 型下限が適応的量子推定により達成可能であることが実験的に検証できた。本研究成果は将来、生体計測等の分野で応用されることが期待できる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Fujiwara Akio, Yamagata Koichi	4. 巻 26
2. 論文標題 Noncommutative Lebesgue decomposition and contiguity with applications in quantum statistics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bernoulli	6. 最初と最後の頁 2105-2142
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3150/19-BEJ1185	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Nohara Saki, Okamoto Ryo, Fujiwara Akio, Takeuchi Shigeki	4. 巻 102
2. 論文標題 Adaptive quantum state estimation for dynamic quantum states	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review A	6. 最初と最後の頁 030401(R)
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevA.102.030401	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fujiwara Akio	4. 巻 135
2. 論文標題 Dually flat structures induced from monotone metrics on a two-level quantum state space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The European Physical Journal Plus	6. 最初と最後の頁 860
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1140/epjp/s13360-020-00877-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Akio Fujiwara and Koichi Yamagata	4. 巻 20
2. 論文標題 Information Geometry of Randomized Quantum State Tomography	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 609 ~ 609
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/e20080609	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Akio Fujiwara	4. 巻 252
2. 論文標題 Complementing Chentsov's characterization	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 335 ~ 347
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-97798-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Okamoto, Satoshi Oyama, Koichi Yamagata, Akio Fujiwara, and Shigeki Takeuchi	4. 巻 96
2. 論文標題 Experimental demonstration of adaptive quantum state estimation for single photonic qubits	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review A	6. 最初と最後の頁 22124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevA.96.022124	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Akio	4. 巻 -
2. 論文標題 Homage to Chentsov's theorem	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Informational Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41884-022-00077-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sato Yuzuru, Tsutsui Daiji, Fujiwara Akio	4. 巻 430
2. 論文標題 Noise-induced degeneration in online learning	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Physica D: Nonlinear Phenomena	6. 最初と最後の頁 133095 ~ 133095
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physd.2021.133095	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Akio Fujiwara
2. 発表標題 Information geometry of randomized qubit state tomography
3. 学会等名 Entropy 2018: From Physics to Information Science and Geometry (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤原彰夫
2. 発表標題 情報幾何学：古典から量子へ
3. 学会等名 幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Akio Fujiwara
2. 発表標題 Recent progress in asymptotic quantum statistics
3. 学会等名 2020 International Workshop on Quantum Information, Quantum Computing and Quantum Control (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	佐藤 譲 (Sato Yuzuru) (30342794)	北海道大学・電子科学研究所・准教授 (10101)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	杉田 洋 (Sugita Hiroshi) (50192125)	大阪大学・理学研究科・教授 (14401)	
研究分担者	長岡 浩司 (Nagaoka Hiroshi) (80192235)	電気通信大学・大学院情報理工学研究科・名誉教授 (12612)	
研究分担者	山形 浩一 (Yamagata Koichi) (30743520)	国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・特任准教授 (62615)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関