

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H04823

研究課題名（和文）ランダム行列の深い研究と量子情報理論への応用

研究課題名（英文）Random Matrix Theory and applications to Quantum Information Theory

研究代表者

COLLINS Benoit (Collins, Benoit)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20721418

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 18,500,000円

研究成果の概要（和文）：Bordenaveとともにoperator valued non-backtracking理論を深め、ランダム置換が強漸近的自由性を持つことを示して、それをもとに20年来の重要な未解決問題Alon予想解決した。同じくBordenaveとともにユニタリランダム行列のテンソルに対して強漸近的自由性を証明した。Guionnet, Parraudとの共同研究でHaagerupとThorbjornsenの独創的な論文の結果について、新しい定量的な証明を与えた。それをもとにParraudとの共同研究で量子情報理論への応用としてMOEの加法性の破れが実現する次元の限界を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子物理に強い動機を持つランダム行列理論は理論的な興味だけでなく多くの科学で応用がなされている。量子物理だけでなく、リーマン予想や代数幾何のような数学の基礎を成すような分野から数理ファイナンスや情報科学、量子計算、学習理論などの応用分野まで幅広い分野にその応用を持っている。実際本研究課題でも量子コンピュータの開発などで注目されている量子情報理論で重要なMOEの加法性の破れを定量的に考察することに成功した。最近では深層学習をはじめとする機械学習分野でもランダム行列の活用が始まっており、本研究に関わる結果は今後の社会の基礎数理としての期待があると考えている。

研究成果の概要（英文）：With Bordenave, we developed the theory of operator valued non-backtracking and showed strong asymptotically freeness for random permutations, which led to the solution of the Alon conjecture, an important unsolved problem for 20 years. Together with Bordenave again, we proved strong asymptotic freeness for tensors of unitary random matrices. With Guionnet and Parraud, we gave a new quantitative proof of the results of the original paper by Haagerup and Thorbjornsen. Based on this as an application to quantum information theory, in collaboration with Parraud, we showed the bound of dimension in which the MOE additivity violation occur.

研究分野：Free probability theory

キーワード：Free probability Random Matrices

1. 研究開始当初の背景

歴史的背景

ランダム行列理論 (RMT) の研究は、20 世紀初頭数理統計学の中で Wishart による共分散の推定問題の研究の中で始まった。その後、ランダム行列理論の系統的研究が、量子物理の枠組みにおいて 1963 年ノーベル賞を受賞した Wigner [4] による研究で始まった。そして、今日ではこの分野は劇的な進歩を遂げている。その様子がこの分野のバイブルである 1991 年の Mehta [2]、最近出版された Tao [3] や Anderson, Guionnet and Zeitouni [1] などの文献から伺える。これらには、ランダム行列理論は多くの科学で応用がなされていることが述べられている：量子物理だけでなく、数論におけるリーマン予想に関連する話題や代数幾何のような数学の基礎を成すような分野から数理ファイナンスにおけるポートフォリオ最適化問題や情報科学における無線通信理論、量子計算、深層学習などの学習理論などの応用分野まで幅広い分野にその応用を持っている。

[1] G. W. Anderson, A. Guionnet and O. Zeitouni. An introduction to random matrices. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 118, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. xiv+492 pp.

[2] M. L. Mehta. Random matrices. Third edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. xviii+688 pp.

[3] T. Tao. Topics in random matrix theory. Graduate Studies in Mathematics, 132, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. x+282 pp.

[4] E. P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. Ann. of Math. (2) 67, 1958 325–327.

今日におけるランダム行列理論の情勢

ランダム行列理論は欧州や北米を中心に発展してきている。例えば、研究開始前の 2014 年国際数学会議 (ICM) において重要な位置を占める招待講演では約 10 個のランダム行列理論に関連する招待講演が行われた。この数字はこの分野の活発さや幅広い関心を示していると言えるだろう。それらの講演はすべて欧州や北米出身者によるものであった。しかし、他方で日本においてもランダム行列理論は伝統的に数多くの成功を収めている。実際、確率論、作用素環論、理論物理学などの基礎理論をはじめ、無線通信理論のような情報理論などの分野に多くの貢献者がいる。申請者はこれらの研究者と多くの連携をしてきている。日本における全体的な傾向としては応用的な分野よりは解析、可積分系、行列式点過程などのような基礎的な分野に重点が置かれ発展してきている。

2. 研究の目的

本研究の目的の一つは様々な問題に現れるランダム行列の作用素ノルムを求めることである。原理的に、任意の行列のスペクトルの性質はその行列モーメントから読み取ることができる。すなわち、 $n \times n$ 行列 A について全ての固有値の情報を知りたければ、行列モーメント列 $\left\{ \frac{1}{n} \text{Tr}(A^k) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ を知れば十分である。 $\left\{ \frac{1}{n} \text{Tr}(A^k) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ をモーメントとして持つような確率測度は各固有値に等しく重みを持つ分布となるからである。ランダム行列の文脈ではこれをモーメント法という。

ランダム行列を考える際、重要な測度がある。群論と確率論の交わる分野で重要な概念となっているハール測度と呼ばれる群上の一様測度である。コンパクト群上ではその存在が示されており、これにより「コンパクト群上からランダムに要素を取る」ことに数学的な意味を与えることができる。その一方でハール測度の存在の証明は構成的ではないため、具体的なモデルに対してその計算が困難である。研究代表者のこれまでの研究の最大の成果の 1 つは、ハール測度の下でのランダム行列のトレースモーメントの期待値を計算する系統的手法を作り上げてきたことである。今日、それはワインガルテン解析と呼ばれている。ワインガルテン解析においてはその積分量がワインガルテン関数と呼ばれる深い表現理論的意味を持つ関数で記述される。このワインガルテン関数を深く理解し、ハール測度による行列積分を精密に評価し、複雑な構造を持つランダム行列に対するモーメント法が確立できる。

ランダム行列の研究の方向性は非常に多岐にわたる。大域的な固有値分布の研究や「普遍性」の研究は幅広く行われている。また固有ベクトルの研究も多く行われている。その中で、複雑な構造を持ったランダム行列のサイズ極限では「希な」固有値(アウトライヤー)の研究や作用素ノ

ルムの研究は多くの副産物があるにもかかわらず、まだまだその全貌が見えにくい未開の分野として残っている。

モーメント法は技術の整備されていない未開の分野を開拓するのに強い。その証拠として、確率論とモーメント法の歴史を見ると良い。モーメントの概念は測度論的な確率論の基礎づけが行われる前の確率論の黎明期すでに存在し、多くの発見をもたらした。その後、目覚ましい解析的取り扱いの進歩の後、ランダム行列理論が生まれる前に、モーメントとキュムラントの研究が、特に 20 世紀半ばのロシアのチームによって、行われた。ランダム行列理論の歴史は、モーメント法が各ブレイクスルーに用いられているという点で確率論の歴史と非常に似ている。モーメント法による新しいブレイクスルーが起きた後で解析的手法により別証明が行われ、その精密化が行なわれることが多くある。例えば、ウィグナーはモーメント法を用いてランダム行列のサイズ極限における固有値分布が半円分布になること示した。また、再び、モーメント法を通じて Sinai, Soshnikov により ノルム評価の普遍性が示された。このように未解の部分が多い困難な問題を解いてきた歴史がモーメント法には多くある。まだまだよくわからない部分が多い作用素ノルムの世界にモーメント法を適用し、理解を深める。

3. 研究の方法

共同研究者の招聘、訪問及びセミナー発表・開催で情報を収集しつつ議論を重ね、それをまとめて論文として発表してきた。

また、特に本研究課題では以下のこの分野における最大級の国際会議を開催した。

・国際会議名「Random matrices and their applications」

京都大学 2018 年 5 月 21 日から 25 日

Webpage <https://djalil.chafai.net/wiki/kyoto2018:start>

この国際会議開催を通して、ランダム行列に関する情報を広く収集し、研究を加速させた。

特に Paul Bourgade (New-York, USA), Zhigang Bao (Hong-Kong, China), Alexander Bufetov (Marseille, France), Raphaël Butez (Paris-Dauphine, France)

Laure Dumaz (Paris-Dauphine, France), Peter Forrester (Melbourne, Australia)

Piotr Graczyk (Angers, France), Adrien Hardy (Lille, France), Antti Knowles (Genève, Switzerland), Arno Kuijlaars (Leuven, Belgium), Paul Jung (KAIST, South Korea)

Justin Salez (Paris-Diderot, France), Ke Wang (Hong-Kong, China), Jianfeng Yao (Hong-Kong, China)らの海外からの幅広い年代の招待講演者を招聘し、ランダム行列の最先端の話題の獲得及び議論を行なった。この国際会議では 50 名以上の海外からの訪問者を受け入れた。

4. 研究成果

(1) ランダム置換が強漸近的自由性を持つことと Alon 予想解決

まず、研究開始当初はランダム行列の研究の中でも特にランダム置換に関するものに取り組んだ。そしてトゥールーズ第三大学の Charles Bordenave との共同研究で独立同分布なランダム置換が強漸近的自由性を持つということを示し論文以下のとおり出版された。

C. Bordenave, B. Collins, Eigenvalues of random lifts and polynomials of random permutation matrices. Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 3, 811-875.

以下でその背景と結果の簡単な解説をする。

Voiculescu により漸近的自由性という概念が導入された。これは複数個の独立なランダム行列による多項式の正規化トレースモーメントの期待値を考えた際、それがサイズ極限で自由独立な確率変数の多項式のモーメントに収束する、というものである。これは大きなブレイクスルーとなり、その後色々な研究に応用され、それ自身がより詳細に研究されている。特に、ランダム置換によるランダム行列の漸近的自由性は A. Nica (1993, Pacific J. Math.) で示された。

その後強漸近的自由性という「独立な複数個のランダム行列が自由独立性をサイズ極限で実現すること」+「その作用素ノルムも収束する」というより強い概念が GUE のケースに U. Haagerup and S. Thorbjørnsen (2005, Ann. of Math.) で示された。これは作用素環論などに大きな応用を持ち、強い衝撃を与えた。作用素ノルムの収束はランダム行列の文脈でとても大事である。経験固有値分布のサイズ極限を考えた際、漸近的自由性から固有値の大域的な情報はわかる一方で、サイズ極限で消えてしまう少ない数の重要な情報がある。例えば極限分布の台の外に一つも固有値が存在しないのかという問題がある。このような固有値はアウトライヤーとも呼ばれ、行列論の応用でも、例えば主成分分析など、で非常に重要になる。

アウトライヤーが存在しないことは漸近的自由性からはわからないが、作用素ノルムが極限分布の台の上限に収束することが言えれば極限分布の台の外に一つも固有値が存在しないことが言えたことになる。

GUE 以外のその他のランダム行列のケースにおける強漸近的自由性の証明は未解決問題として残っていた。その解決の第一歩としてボルドー大学の Camille Male と研究代表者の過去の共同研究 B. Collins and C. Male (2014, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.) でハールユニタリランダム行列についても強漸近的自由性が示すことができた。ユニタリ行列というユークリッド空間の対称性を扱う対象として考えるとランダム置換に対する本研究結果はこの Camille Male との

共同研究の一般化であり自然な帰結にも見える。その一方で、その証明にはまったく新しいアイデアが必要であり、operator valued non-backtracking theory と呼ばれる技術を改良することにより、その証明がようやく可能となった。ランダム置換に対する漸近的自由性はランダムシュライヤーグラフや固定されたグラフのランダム被覆の作用素のスペクトル情報を詳細に与える。そのため、本結果の重要な応用として 20 年前からの大きな未解決問題 Alon 予想を解決するに至った。

(2) ユニタリランダム行列のテンソルに対する強漸近的自由性を証明

研究代表者は Charles Bordenave とともにランダムテンソルの解析とそれらの強漸近的自由性の問題について非常に大きな進展を遂げた。研究代表者らはコンパクト群の表現論に由来するユニタリランダム行列に対して強漸近的自由性を証明した。その結果を「Strong asymptotic freeness for independent uniform variables on compact groups associated to non-trivial representations」としてまとめ投稿している。

本論文では与えられた非自明な signature とそれに付随する既約表現 $V_{n,\rho}$ を考える。 $U(V_{n,\rho})$ の行列部分群を考え、その上の一様分布従う独立なランダム行列の組が強漸近的自由性を持つのは signature が非自明であることを示した。このことは $U(V_{n,\rho})$ より小さい次元の空間を考えているということであり、そのランダムネスが落ちている場合でも強漸近的自由性が成り立つことを示したことになる。一方で非自明な場合に限るということはすなわち、その次元が有限にはとどまらないことを示唆している。この結果は基本表現と反傾表現のテンソルに対する強漸近的自由性の証明の系(同値な命題)として得られる。このことは表現論の結果と作用素環論の基本的な結果を組み合わせて使うことで示せる。そしてこの結果は自明(表現が 1 次元)であるか、強漸近的自由性が成り立つかのどちらかになるという既約表現の自然列の上での 0-1 法則というように解釈することができる。この問題には従前の解析的手法、例えば Male との研究で用いた folding method や U. Haagerup and S. Thorbjørnsen (2005, Ann. of Math.) の Schweinger-Dyson 方程式を用いた方法はテンソルを対象にしているため、用いることができない。モーメント法でアプローチする必要があり、(1)の研究で用いた operator valued non-backtracking theory を改良して用いている。またこの手のモーメントを計算する手法で研究代表者が中心に開発してきた Weingarten 解析の改良と、GUE とハールランダム行列のモーメントの定量的比較を改良して用いた。

これらの結果は数理物理や量子情報理論からの応用的な興味も多く持たれることが期待できる。元々このような計算の動機は量子エキスパンダーの問題から来ており、本論文の結果につながる Pisier の論文自体も量子エキスパンダーを同期に來ている。

(3) Gaudreau Lamarre, Male との共同研究:「Asymptotic Freeness of Unitary Matrices in Tensor Product Spaces for Invariant States」にまとめ、専門誌 Random Matrices: Theory and Applications Vol. 12, No. 02, 2250052 (2023)に掲載された。

研究代表者と Gaudreau Lamarre の共同研究によりユニタリ行列のテンソル積が正規化トレースのもとで漸近的自由性を満たすための条件を示していた。本論文ではより一般の状態に対してハールユニタリ行列のテンソル積が漸近的自由性を満たすかを調べた。

Camile Male 氏により導入された Traffic freeness が tensor unitary の文脈に正確に対応していることを対称群の不変部分空間の理論と traffic 確率論を用いて証明した。

その結果、ユニタリ群の表現の列の中でこの結果を述べる事ができた。

この研究では Fell's absorption principle のようなテンソル積をとっても自由ユニタリ作用素の性質がそのまま保たれる、というものの漸近版を考えるというアイデアがある。Fell's absorption principle では自由ユニタリ作用素 u_1, u_2, \dots, u_m は任意のユニタリ作用素 v_1, v_2, \dots, v_m に対して

$$\|\sum u_m \otimes v_m\| = \|\sum u_m\| = 2\sqrt{L-1}$$

を満たす。これの漸近版としてハールユニタリランダム行列 $U_1^{(N)}, \dots, U_m^{(N)}$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sum U_m^{(N)} \otimes v_m\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\sum U_m^{(N)}\| = 2\sqrt{L-1}$$

を示していた。このテンソル積をより複雑にした場合を考えた。

$K = K_1 + K_2 + K_3$ で $U_N = \{U_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ を独立な $N \times N$ ハールユニタリランダム行列、 $V_N = \{V_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ を $U_N = \{U_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ と独立な $N \times N$ ユニタリランダム行列として $W_N = \{W_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ とし

$$W_l = U_l^{(N) \otimes K_1} \otimes U_l^{(N) \otimes K_2} \otimes V_l^{(N)}$$

を考えたとき、

(条件 1) 状態 $\psi_N: M_N^{\otimes K} \rightarrow \mathbb{C}$ または $V_N = \{V_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ が \mathcal{S}_N 不変であり;

(条件 2) $V_N = \{V_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ が Mingo-Speicher bound を満たす

とき $W_N = \{W_l^{(N)}\}_{l=1}^L$ は $(M_N(\mathbb{C})^{\otimes K}, \psi_N)$ でハールユニタリ系に収束するということを示した。
 $K_1 = 1, K_2 = K_3 = \dots = L$ のときは独立なハールユニタリの漸近的自由性にあたり、この結果を広く拡張したことを意味している。

(4) テンソル積構造に対する自由確率論

また, Luca Lionni とテンソル積構造に対する自由確率論について研究を大きく進めた. 具体的には, 通常自由確率論でランダム行列のサイズ極限におけるスペクトル分布を研究する道具立てでキーである R 変換と呼ばれるものについて, ランダムテンソルの R 変換を求める方法を見出した. これにより, 量子情報理論や量子物理学の local unitaries の理論に自由確率論を用いて研究する道具立てができたこととなり, それらの問題への応用が期待できる.

(5) Michael Magee と Doron Purer らと, 自由群の自己同型群について自由確率論を用いて調べ, 「Automorphism-invariant positive definite functions on free groups」としてまとめ Proceedings of the 27th International Conference in Operator Theory (2020) Amer. Math. Soc. に掲載された. 研究代表者はこの研究をさらに発展させるため, Michael Magee と surface words の漸近的自由性を証明するという長期プロジェクトを開始した.

(6) Anthony Metcalfe との共同研究: 「Gelfand-Tsetlin polytopes and random contractions away from the limiting shapes」としてまとめ専門誌 Annales de la Faculte des sciences de Toulouse へ掲載確定した. Metcalfe 氏と determinantal point process と量子情報の関係について研究した. 正規化トレースモーメントの意味での極限分布を持つエルミート行列の列 $\{A_n\}$ と full flag manifolds 上の一様分布から与えられる full flag の列 $\{0 \leq p_1^n \leq p_2^n \leq \dots \leq p_l^n \leq \dots \leq 1_n\}$ を考え, $p_l^n A_n p_l^n$ の最大固有値が大きくなる確率のシャープな評価を与えた. これは Gelfand-Tsetlin polytopes 上の一様分布を研究していることと等価である.

(7) Alice Guionnet, Felix Parraud との共同研究: 「On the operator norm of non-commutative polynomials in deterministic matrices and iid GUE matrices」にまとめ専門誌 Cambridge Journal of Mathematics Volume 10, Number 1, 195-260, 2022 に掲載された. Parraud 氏は研究代表者と Lyon 大学の Guionnet 氏の博士課程の学生 (joint supervision) である. この論文では, Haagerup と Thorbjornsen の独創的な論文の結果について, 新しいより定量的な証明を与えた.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Brannan Michael, Collins Benoit	4. 巻 747
2. 論文標題 Entanglement and the Temperley-Lieb category	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Contemp. Math.	6. 最初と最後の頁 27-50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/747/15037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Bordenave, Collins	4. 巻 190
2. 論文標題 Eigenvalues of random lifts and polynomials of random permutation matrices	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annals of Mathematics	6. 最初と最後の頁 811-875
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4007/annals.2019.190.3.3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Collins Benoit, Yin Zhi, Zhong Ping	4. 巻 51
2. 論文標題 The PPT square conjecture holds generically for some classes of independent states	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 425301 ~ 425301
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aadd52	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Collins Benoit, Osaka Hiroyuki, Sapra Gunjan	4. 巻 555
2. 論文標題 On a family of linear maps from $M_n(\mathbb{C})$ to $M_{2n}(\mathbb{C})$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 398 ~ 411
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2018.06.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 COLLINS Benoit、HASEBE Takahiro、SAKUMA Noriyoshi	4. 巻 70
2. 論文標題 Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1111 ~ 1150
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/77147714	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins Benoit、Novak Jonathan、Sniady Piotr	4. 巻 24
2. 論文標題 Semiclassical asymptotics of $\mathbb{GL}_N(\mathbb{C})$ tensor products and quantum random matrices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 2571 ~ 2623
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-017-0387-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brannan Michael、Collins Benoit	4. 巻 9
2. 論文標題 Dual bases in Temperley-Lieb algebras, quantum groups, and a question of Jones	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 715 ~ 748
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT/118	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Benoit Collins、Patrick Hayden、Ion Nechita	4. 巻 3
2. 論文標題 Random and Free Positive Maps with Applications to Entanglement Detection	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 869--894
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnw054	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Szymanski Konrad, Collins Benoit, Szarek Tomasz, Zyczkowski Karol	4. 巻 50
2. 論文標題 Convex set of quantum states with positive partial transpose analysed by hit and run algorithm	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 255206 ~ 255206
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aa70f5	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Benoit Collins Sho Matsumoto	4. 巻 14
2. 論文標題 Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 ALEA. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics	6. 最初と最後の頁 631-656
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Collins Benoit, Dahlqvist Antoine, Kemp Todd	4. 巻 170
2. 論文標題 The spectral edge of unitary Brownian motion	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 49 ~ 93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00440-016-0753-x	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Brannan Michael, Collins Benoit	4. 巻 358
2. 論文標題 Highly Entangled, Non-random Subspaces of Tensor Products from Quantum Groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1007 ~ 1025
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-017-3023-6	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計23件(うち招待講演 23件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong asymptotic freeness for random tensors of unitaries
3. 学会等名 Probability seminar - Princeton (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong asymptotic freeness for random tensors of unitaries
3. 学会等名 Probability and Mathematical Physics Seminar - NYU (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Regularized minimum output entropy and generalized Haagerup inequalities
3. 学会等名 Colloquium - Kaohsiung (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Norm estimates for polynomials in random permutations
3. 学会等名 Probability seminar - Academia Sinica - Taipei (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations
3. 学会等名 Colloquium - Melbourne (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations and random tensors
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis - Fukuoka (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations and random tensors
3. 学会等名 WPI 2019 - Hong Kong. (8) June 2019 - Fields (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Equivariance and application to entanglement detection
3. 学会等名 Interactions between Noncommutative Analysis and Quantum Information Theory - Harbin (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong Asymptotic Freeness for Random Permutations and Random Tensors
3. 学会等名 NYUS - Shanghai colloquium (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations
3. 学会等名 HKUST (Hong Kong) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations
3. 学会等名 UCLA (IPAM) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Random permutations and quantum information theory
3. 学会等名 Oberwolfach (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations
3. 学会等名 Ottawa (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 The PPT2 square conjecture holds generically
3. 学会等名 Nagoya (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Random permutations and quantum information theory
3. 学会等名 Okinawa (OIST) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Non commutative probability and the Connes embedding problem
3. 学会等名 University of Oslo (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 The PPT2 square conjecture holds generically
3. 学会等名 Chula University Bangkok (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 strong freeness for random tensors
3. 学会等名 UC Berkeley (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Introduction to Weingarten calculus
3. 学会等名 CIMPA spring school, Settat, Morocco (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices
3. 学会等名 Park City, PCMI, USA (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 MOE estimates for quantum channels arising from random isometries and free probability
3. 学会等名 IHP, Paris, France (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations
3. 学会等名 Orsay, Paris, France (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random permutations
3. 学会等名 Paris 6, France (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Benoit Collins' website https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~collins/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Random matrices and their applications	開催年 2018年～2018年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	Marseille	ENS Lyon	IHP