

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H04824

研究課題名（和文）非線形偏微分方程式の臨界空間における適切性の研究

研究課題名（英文）Well-posedness for the nonlinear partial differential equations in critical spaces

研究代表者

岩淵 司 (IWABUCHI, Tsukasa)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：40634697

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,700,000円

研究成果の概要（和文）：圧縮性Navier-Stokes方程式の初期値問題に対する非適切性に関して、一定の成果を得ることができた。具体的には、順圧性を課した場合と温度も考慮した全システムに対して初期値問題が適切となる関数空間と非適切となる関数空間の境目を明らかにすることができた。また、全システムに対しては自己相似性をもつ特殊解を構成することができた。領域上の関数空間論、および、非線形偏微分方程式への応用に関しては、表面準地衡方程式と呼ばれる方程式に対して、領域が半空間および有界領域の場合に対してスペクトルの2進数分解を基本にした結果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形偏微分方程式の初期値問題の適切性および非適切性の問題は線形と非線形の性質の釣り合いの状況を数学的に考察する問題である。本研究ではこうした問題を流体力学に関連する方程式に対して行っており、適切性のための臨界空間を明らかにすることで解の安定性を判定する際の一定の方法を提示したことになると考える。領域上の解析理論に関しては、数学的に解の一意性や安定性を議論するための基礎理論の構築の一部である。

研究成果の概要（英文）：We obtained several results for compressible Navier-Stokes equations under the barotropic condition and for the full-system of the density, the velocity and the temperature. The ill-posedness is proved in the function spaces with the threshold regularity for each equations. In addition, we proved the existence of self-similar solutions under the radial symmetric condition for the density, the velocity and the temperature. As for theory of the function spaces on general domains and its application to nonlinear partial differential equations, we established one technique with the dyadic decomposition of the spectrum for the Dirichlet Laplacian applicable to the surface quasi-geostrophic equation in the half space and the bounded domain.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：Navier-Stokes方程式 スペクトル理論

1. 研究開始当初の背景

流体の運動を記述するモデルとして知られている Navier-Stokes 方程式などの非線形偏微分方程式の初期値問題を考え、解の存在、一意性、および、初期値への解の連続依存性が成り立つか否かを明らかにすることが研究テーマである。これら3つの性質が成り立つとき、初期値問題は適切であるという。適切性が成立するか否かの境目の関数空間を明らかにすることが研究背景である。適切性の研究の歴史は長いが本研究では適切性に加えて非適切性も証明することで適切性のための境界の関数空間を見出す方針をとる。加えて、領域上の関数空間論、および、その非線形偏微分方程式への応用を目指す。

2. 研究の目的

初期値問題の適切性古くからなされており非適切性の研究は2000年以降の研究で発展してきた。本研究では圧縮性の Navier-Stokes 方程式を考察するが、臨界空間と呼ばれる適切性のための境目に関係するような結果は Danchin の2001年の論文が始まりで本研究では非適切性の観点から適切性のための最適な関数空間を見出すことを目標とした。さらに領域上の流体方程式の解析を発展させることも目的である。特に、全空間の Fourier 変換をもとにした方法をより一般の領域の場合にも適用可能な理論の構築を目指す。

3. 研究の方法

順圧性の Navier-Stokes 方程式に関しては、移流項による特異性が基本的であるため、初期値の正則性と移流項から生み出される特異性の兼ね合いを調べることから始めた。しかしながら移流項だけで適切性と非適切性の境目を明らかにすることは困難であることがわかった。さらに研究を進める中で、密度の変化から生じる準線形の項と移流項が打ち消し合い、特異性が消失することを見出すことができ、それを要因として非適切性を証明する。

温度付きの全システムに対する非適切性に関しては、空間2次元と空間3次元以上では性質が異なるであろうことが既存の結果から予想される。最も原因となる項は応力テンソルを表す項でエネルギー保存の式と関係している。空間3次元以上の場合には予想される結果があり、空間2次元の場合にはほとんど結果がなかったため、空間2次元の場合を研究する。

領域上の関数空間論および非線形偏微分方程式の解析については、Dirichlet 境界条件を考えた場合の熱半群、および、分数べきラプラシアンで生成される半群に対する線形評価式を明らかにするとともに、非線形問題への応用例を提示する。

4. 研究成果

順圧性の Navier-Stokes 方程式に関しては、移流項による特異性と密度変化から生じる準線形項による特異性との打ち消し合いを不等式の形で明らかにすることができ、適切性の境目の関数空間において非適切性を証明することができた。既存の結果では移流項を要因とした特異性の追跡であったが、今回の結果により準線形項も無視できない場合がありうるということがわかった。

空間2次元、全システムの Navier-Stokes 方程式に関しては、温度について負の正則性を考えた場合には Sobolev 空間や Besov 空間などの標準的な枠組みで考える限りにおいて、初期値問題は非適切となることを証明できた。空間3次元以上の場合には空間次元の指数の可積分性が適切と非適切を分ける境目となっているが、空間2次元の場合には方程式の構造が全くことなることを明らかにした。

これらの非適切性の研究をする中で、表面準地衡方程式の時間無限大での解析性と漸近挙動、および、全システムの Navier-Stokes 方程式に対して自己相似解と呼ばれる特殊解の存在を証明することができた。前者は分数べきラプラシアンを有する方程式を考えており、特に非線形項と均衡が現れる臨界型の方程式を考える。その場合に時空間に関して解析性が得られ、さらには全ての解は線形方程式の基本解に収束することを証明することができた。解の性質を考える上で意味のある結果である。自己相似解に関しては、得られた解を表す関数は空間遠方に対応するスケールから定まる多項式オーダーで減衰するような解で、既存の枠組みでは扱うことができない重要な解を得ることができた。

領域上の解析理論については、条件がない一般の領域において Dirichlet ラプラシアンに対する分数べきラプラシアンで生成される半群の線形評価式、最大正則性評価式、実補間、などについて明らかにすることができた。また正則性を Dirichlet ラプラシアンで測った場合の積の評価式についても一定の結果を得ることができた。非線形偏微

分方程式への応用例として表面準地衡の初期値問題について、時間局所可解性、小さい初期値に対する時間大域的可解性の結果を得ることができた。これらの結果により、スペクトル分解を基本にした理論で非線形問題を解決する方法の1つを提示することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K. Tanguchi	4. 巻 152
2. 論文標題 Besov spaces on open sets	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin des Sciences Mathematiques	6. 最初と最後の頁 93-149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.bulsci.2019.01.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Iwabuchi	4. 巻 21
2. 論文標題 Derivatives on Function Spaces Generated By the Dirichlet Laplacian and the Neumann Laplacian in One Dimension	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Commun. Math. Anal.	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K. Taniguchi	4. 巻 34
2. 論文標題 Boundedness of spectral multipliers for Schrödinger operators on open sets	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Rev. Mat. Iberoam.	6. 最初と最後の頁 1277-1322
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/RMI/1024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Iwabuchi, T. Kawakami	4. 巻 107
2. 論文標題 Existence of mild solutions for the Hamilton-Jacobi equation with critical fractional viscosity in the Besov spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 464-489
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.matpur.2016.07.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Iwabuchi	4. 巻 11
2. 論文標題 The semigroup generated by the Dirichlet Laplacian of fractional order	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Anal. PDE	6. 最初と最後の頁 683-703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/apde.2018.11.683	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計25件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Several properties of Besov spaces with Dirichlet boundary condition
3. 学会等名 Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩淵司, P. Germain
2. 発表標題 Forward self-similar solutions for compressible Navier-Stokes equations
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩淵司
2. 発表標題 DirichletおよびNeumann Laplacianに付随するSobolev空間における積の評価式
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩淵司
2. 発表標題 Self-similar solutions for compressible Navier-Stokes equations
3. 学会等名 Critical exponent and nonlinear evolution equations 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩淵司
2. 発表標題 Self-similar solutions for compressible Navier-Stokes equations
3. 学会等名 NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Besov spaces on open sets with the Dirichlet boundary condition and their application to the fractional Laplacian
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Besov spaces on open sets with the Dirichlet boundary condition and their application to the fractional Laplacian
3. 学会等名 International Research Training Group 1529 Mathematical Fluid Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Analyticity and Large Time Behavior of Solutions for the Burgers Equation with the Critical Dissipation
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications AIMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 分数冪のディリクレラプラシアンで生成される半群について
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 The semigroup generated by the Dirichlet Laplacian of fractional order
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 The semigroup generated by the Dirichlet Laplacian of fractional order
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting Program, Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Analyticity and large time behavior of solutions for the Burgers equations with the critical dissipation
3. 学会等名 Peking-Yamagata-Tohoku Universities joint workshop for Harmonic Analysis and PDE (山形大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Analyticity and large time behavior of solutions for the Burgers equations with the critical dissipation
3. 学会等名 FUKUSHIMA-TOHOKU-UOW PDE WORKSHOP (University of Wollongong) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Besov spaces on open sets with the Dirichlet boundary condition and an application to the fractional Laplacian
3. 学会等名 Hyperbolic Partial Differential Equations and Related Topics (中央大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Ill-posedness for the compressible Navier-Stokes equations under the barotropic condition
3. 学会等名 The 15th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics (早稲田大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Remark on the function spaces generated by the Dirichlet Laplacian and the Neumann Laplacian in one dimension
3. 学会等名 Recent Topics on Partial Differential Equations (中央大学) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Ill-posedness for the compressible Navier-Stokes Equations
3. 学会等名 Analysis Seminar, Courant Institute of Mathematical Sciences (New York Univ.) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する不適切性について
3. 学会等名 日本数学会 特別講演 (東京大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K. Taniguchi
2. 発表標題 Dirichlet Laplacian で生成される Besov 空間
3. 学会等名 日本数学会(東京大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K. Taniguchi
2. 発表標題 領域上の Besov 空間における双線 形評価式
3. 学会等名 日本数学会(東京大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K. Taniguchi
2. 発表標題 Schrodinger 作用素によって生成 される Besov 空間
3. 学会等名 日本数学会(東京大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 esov spaces generated by the Dirichlet Laplacian and their properties
3. 学会等名 松山解析セミナー-2018 (愛媛大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Dirichlet 境界条件付きの Besov 空間について
3. 学会等名 第 15 回浜松偏 微分方程式研究集会 (静岡大学) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 一般領域上の超関数と関数空間論について
3. 学会等名 東北大学大学院理 学研究科数学専攻談話会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Iwabuchi
2. 発表標題 Solvability and regularity for the Burgers equation with the critical dissipation
3. 学会等名 分数冪拡散方程式の漸近解析とその周辺（京都大学）（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------