

令和 元年 6 月 20 日現在

機関番号：13901

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H06737

研究課題名(和文)部分環族を用いた極小位相力学系の接合積の構造解析

研究課題名(英文) Structures of crossed products of minimal dynamical systems based on subalgebra families

研究代表者

鈴木 悠平 (Suzuki, Yuhei)

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：20804511

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：Delaroche, Farah--勝良 et alなどの有力な研究者により揭示されていた未解決問題をいくつか解決することができたほか、局所コンパクト群に関するAPと完全性の関係性の完全決着、位相力学系と作用素環の包含に関する新たな強力な関係性の発見など、重要な貢献をいくつかすることができた。これらの未解決問題や新規の現象は、いずれも数十年以上にわたって手付かずのまま残されていたものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回の採択課題の研究で得られた成果は、いずれもこれまでには専門家にとっても想像することすら難しかった興味深い例の構成や、新しい現象の発見、確立、既存の有用な概念同士の関係の確立である。これらの成果はすでにいくつかの有力な研究者により活用され、さらなる発展が研究対象とされており、学術的な意義・インパクトの大きさを早くも実感することができている。

研究成果の概要(英文)：I have solved a few famous problems by Delaroche, Farah--Katsura et al. I also solved a well-known question either the AP implies exactness for general locally compact groups (the answer is yes). Furthermore I was able to find a new phenomena about the complete correspondence between intermediate extensions of dynamical systems and intermediate operator algebras of the associated crossed product inclusions. All these problems and phenomena are left open/unknown for more than 10 years.

研究分野：作用素環

キーワード：接合積C*環 非可分作用素環 中間因子 中間作用素環 位相力学系 完全性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年の C^* 環論は、その中心的課題であった Elliott プログラム(よい可分従順単純 C^* 環の完全分類およびその特徴付け)がいくつかのブレイクスルーを通してほぼ完成に至り、力学系などから現れる自然で興味深い C^* 環の分類可能性をどう確認するか、分類定理の守備範囲外をどのように理解していくか、ということに推移していくであろうという状況であった。

2. 研究の目的

本研究課題は、このような事情を背景に、とくにもっとも興味深い例があり、純粋な理論としても美しい解析の議論が可能な、接合積 C^* 環の構造の理解および具体例の構成などを通して、作用素環論の発展に貢献することを目的とした。また、分類理論が完成したといっても、それはある意味ではまだひとつの地図が出来上がったという段階であり、実際に分類可能な対象にたいして、どのような現象や性質が見られるかはほとんど何も分かっていない状態である。これについても、とくに Kirchberg 環とよばれる良いクラスにたいして、よい成果が得られるよう接合積構成法を通して、さまざまな検証を行う。

3. 研究の方法

いずれの研究も、無味乾燥な抽象論への固執は避け、具体例に関する疑問や興味深い不思議な現象を徹底して追求していくことで、研究を進めていくことができた。得られた成果はいずれも、おそらく私以外には到達することのできない独自のアイデアや技術がふんだんに含まれており、これまでの研究で培ってきた経験と感性を存分に生かすことができたという満足感がある。これらの成果からは、さらなる不思議や応用が自然と湧きでてきており、自然でしっかりとした、しかしほとんど未開であった、良い数学対象と対峙しているという手応えと充実感があつた。自分のアイデアの重要性、新規性を確認したり、議論を通じた刺激をうけるため、しばしば国内外の専門家を訪問し、議論やセミナー講演を行った。

4. 研究成果

(1)

Anantharaman-Delaroche の著名論文(Trans.AMS, 2002)に掲示されていた未解決問題を二つ解決した。

これは C^* 環への群作用に対する従順性の定義にまつわる問題である。

従順性はもともと Banach-Tarski の病理の原因として、von Neumann が特定した群の性質であり、

従順でない世界では、Banach-Tarski のパラドックスに代表されるような、われわれの通常感覚とは剥離した現象が日常である。

意味のある解析を行うためには従順性はなくてはならない性質である。

Anantharaman-Delaroche は、上記の論文において、 C^* 環上の群作用の従順性を一応定義し、

期待されるよい性質が従順性を持つ場合には保証されることを示している。

しかし本人も論文で言及しているように、この定義は作用される環の中心上の力学系が

とても大きいという性質が大前提となっており、満足のいく完全な定義とは言い難い。とくにこの定義では、非従順群は単純な環の上に従順に作用することはできない。

私はこのような定義が実際に強すぎる要請であることを、単純環への従順とみなすべきいくつかのよい性質を備えた作用を構成することで実証してみせた。(特に上述した二つの未解決問題が否定的に解決される。) von Neumann 環の場合には、上記の定義が正当であるという確かな根拠があり、これは C^* 環論独特の微妙な現象でもある。この構成はこれまでにあまり着手されていなかった非従順群の単純 C^* 環への作用の研究の手がかりを与えるものでもあり、今後のさらなる発展・深化を期待することができる。

(2) 位相力学系や測度空間上の群作用の拡大から生ずる作用素環の包含(接合積構成法)に対して、自由という自然な状況の中で、包含の間に現れるすべての作用素環がもとの力学系の情報(中間因子)から自然に生じるもののみである、という強固な制約を発見した。これにより、従来計算がごく限られた状況でのみ可能であった、「中間作用素環がなす束」の具体的計算が可能なクラスを飛躍的に広げることができた。

このような有用な基本的定理がこれまでまったくの盲点になっていたことは驚きであった。

この定理は Chifan, Skalski などの精鋭によって早速増強、応用されており、さらなる発展性が示唆されている。

(3)

非可分作用素環の構造分解の剛性について、Popa の古い技術を用いて研究した。

具体的には、近似的有限次元(=有限次元環の帰納極限)である単純作用素環で、テンソル積分解、正則可換部分環、漸近的な中心列といったものを全く持たないものを構成することができた。これは可分の場合にもつ、よく知られていて重要な数々の柔軟性

を裏切る決定的な現象である。類似した現象は、集合論を背景に作用素環論を研究している Farah 勝良らのグループにより、部分的な結果が連続体仮説のもとで検証されていたが、我々の解析は ZFC 内で行われており、特に彼らが掲示していた未解決問題をより強い形で完全に解決した。

(4) 局所コンパクト群の AP とその群作用に付随する接合積 C^* 環の関係について、期待すべき定理を証明した。

これは(2)で得られた定理を局所コンパクト群に拡張するために必要不可欠な最初の足掛かりである。

我々の解析は von Neumann 環の設定でも通用する方法であり、特に Haagerup--Kraus(Trans.AMS, 1994)の定理に、非有界荷重など入り組んだ道具を必要としない簡潔な新証明を与える。

この研究のおまけとして、「AP は完全性を導くか？」という、離散群の場合にはよく知られていたが、

一般の局所コンパクト群については長年未解決のまま残されていた問題を肯定的に解決することができた。

これより AP をもつ第二可算局所コンパクト群について、Baum--Connes 予想の単射性が成り立つことが従う。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(4件)

[1] Yuhei Suzuki, Almost finiteness for general étale groupoids and its applications to stable rank of crossed Products, to appear in International Mathematics Research Notices, doi:10.1093/imrn/rny187 査読あり

[2] Yuhei Suzuki, Simple equivariant C^* -algebras whose full and reduced crossed products coincide, to appear in Journal of Noncommutative Geometry 査読あり

[3] Yuhei Suzuki, Complete descriptions of intermediate operator algebras by intermediate extensions of dynamical Systems, to appear in Communications in Mathematical Physics, doi:10.1007/s00220-019-03436-1 査読あり

[4] Yuhei Suzuki, Rigid sides of approximately finite dimensional simple operator algebras in non-separable Category, to appear in International Mathematics Research Notices, doi:10.1093/imrn/rnz079 査読あり

〔学会発表〕(計7件)

[1] Yuhei Suzuki, Complete descriptions of intermediate operator algebras by intermediate extensions of dynamical systems, 幾何学的群論ワークショップ(招待講演)(国際学会)2019年

[2] Yuhei Suzuki, Complete descriptions of intermediate operator algebras by intermediate extensions of dynamical systems, Barcelona Weekend in Operator Algebras(招待講演)(国際学会)2018年

[3] Yuhei Suzuki, Eigenvalue set for étale groupoids and constructions of distinguished minimal actions, 日本数学会2018年度秋季総合分科会,2018年

[4] Yuhei Suzuki, Complete descriptions of intermediate operator algebras by intermediate extensions of dynamical systems, 作用素環論の最近の進展(招待講演)(国際学会)2018年

[5] Yuhei Suzuki, 亜群の almost finiteness と接合積の安定階数
作用素論・作用素環論研究集会,(招待講演)立命館大学,2017年

[6] Yuhei Suzuki, 極小拡大の接合積 C^* 環の純無限性について
2017年度秋季総合分科会,山形大学,2017年

[7] Yuhei Suzuki, Almost finiteness for general etale groupoids and its applications to stable rank of crossed products
RIMS 研究集会 作用素環論の最近の進展, RIMS, (招待講演) 2017 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yuhei.suzuki/j-index.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号 (8 桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。