様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 １３ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2017～2018
課題番号：１７Ｈ０６７８２

研究課題名（和文）p-adic Hodge Theory and Anabelian Geometry

研究課題名（英文）p-adic Hodge Theory and Anabelian Geometry

研究代表者
譚　福成（Tan, Fucheng）

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：００８０３５８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：私はp-adic Hodge理論で、自明ではない係数を使った相対的な設定で、より一般的な半安定比較問題の結晶比較定理に取り組んできました。 他と非自明な係数を持つ結晶コホモロジー。 そのような結果の相対バージョンは、さらに調査が必要です。私はシンプソンの対応にかなりの時間を費やすことができました。私は主に低属の超良性曲線に焦点を当てています。 このバージョンのSimpsonのCorrespondenceは、特性pのOgus-Vologodskiの理論から始める必要があることは明らかです。 これは、数体のほぼすべての場所で、さまざまなp進ガロア表現とHiggsモジュールを可能にします。

研究成果の学術的意義や社会的意義
私の研究プロジェクトは、p進ホッジ理論の主なテーマを明確にすること、そしてそれを他の数学研究の分野に適用することを目指しています。 私の研究は日本がこの中央研究分野での役割を維持するのを助けています。 そして、数学の社会が生きるために必要かつ重要であるこのトピックを学生が学ぶことも可能にしました。

研究成果の概要（英文）：During the research period, I have been working on the crystalline comparison theorem in p-adic Hodge theory for the more general semi-stable comparison problem, with non-trivial coefficients and in the relative setting. Now I am able to formulate integral results for etale and crystalline cohomology with non-trivial coefficients. The relative version of such results shall need further investigation.
Meanwhile, due to the advances above, I was able to spend a considerably large amount of time on Simpson correspondence. At the current stage, my focus is mainly on hyperbolic curves of low genus. Currently, it is clear to me that to formulate an arithmetic version of Simpson correspondence, one needs to start from the theory of Ogus-Vologodski in characteristic p. This allows us to glue the various p-adic Galois representation and Higgs modules at almost all places of a number field. This shares the similarity with the modularity conjectures such as that of Fontaine-Mazur.

研究分野：代数学

キーワード：p-adic Hodge理論

１．研究開始当初の背景

特に Langlands プログラムにおける算術幾何学と数論の研究において、中心的な問題は次のとおりです。どのガロア表現は代数幾何学から来るのか？ Fontaine と Mazur は、重要な条件は「潜在的に対数結晶」であると推測しています。よく知られているように、この予想の最初の非常に自明でない事例、すなわち谷山 - 志村予想の（ほとんどの場合）は、Wiles によって証明され、それは今度はフェルマーの最後の定理を意味する。

「対数結晶」という条件は、p 進アドホールコホモロジーと結晶コホモロジー、p 進ホッジ理論の根本的な問題、Grothendieck によって提起されたものとの間の比較の研究に根ざしていた。

約 10 年後、そのような推測は Fontaine による予想、いわゆる「結晶予想」に定式化されました。例えば、ブロッホ - カトー、フォンテーヌ - メッシング、フォールティング、辻、ニゾイル、ヤマシタ、ベイリンソン、バット - モロー - ショルツ、アンドレッタ - イオビタなど、様々な一般性のある様々な作者による結晶の推測の証明がある。私自身と J. Tong も。代数的だけでなく p 進分析的性質でもある（Scholze の pro-etale トポスによる）（だけ）Faltings のアプローチと私たちのアプローチは（自明ではないが）etale コホモロジーを扱うことができることを強調したい。係数、すなわち一般的な p 進ローカルの係数を持つ。結晶面では、関連する自明でない係数はフロベニウス構造を持つ特定のベクトル束になります。特定の観点、例えば、p 進シンプソン対応の観点から、これらのベクトル束は本質的な関心事である。Faltings と Scholze の線に沿っている比較定理への私のアプローチは確かにそのような問題に役立ちます。

算数幾何学の基本的な部分である P 進ホッジ理論は、谷山志村の前述のモジュラリティ仮説についてのワイルズの証明の直後に数論の中心的トピックとなった。以下の開発は私達にとって非常に重要です。歴史的には、ブレイユは p 進ラングランズ通信を実現しました。これは後に Wiles によって残された谷山-志村予想の残りの事例に関する彼の研究のせいで、より一般的なモジュール化結果の証明において不可欠な役割を果たしました。事実、Kisin の研究と Y. Hu との共同研究の両方で、次元 2 の有理数体に対する（ほとんどの場合の）Fontaine-Mazur 予想を証明するには、それは p-進 Langlands 対応と推測を証明するために管理する、Wiles のモジュール化リフティングヨガ。そのようなアプローチはより高次元のケースでもうまくいくと私は思います。

２．研究の目的

私の提案は、p 進ホッジ理論における比較定理をはっきりさせ、それに本質的に根ざしている算術幾何学と数論のいくつかの方向を統合することを目指しています。その中でも、比較定理が望月の双曲線上のアナベル式グロタンディック予想の証明における重要な道具として、アナベル幾何学に現れたことに気づいた。したがって、p 進ホッジ理論の現在の発展は、アナベル幾何学のさらなる発展につながる可能性があると考えられます。これが私が追求する大きな方向です。以下に説明されるように、そのような研究は当然 p 進シンプソン対応を含むであろう。その一方で、これらのプロジェクトを望月によって最近導入された Inter-universal Teichmuller 理論と関連付けることは非常に興味深いでしょう。後者の理論は、アナベル幾何学の応用と見なすことができ、また、p-adic Hodge 理論における de Rham コホモロジーと etale コホモロジーとの間の比較定理の大域的なシミュレーションであり、これはまさに望月の研究の動機です。

以下では、私は p-adic Hodge 理論を中心とした私のプロジェクトのより詳細な説明を提供します。

（i）p 進ホッジ理論における準安定予想

p 進整数環上の適切な滑らかな形式スキームの（実際には、このような滑らかなオブジェクト間の適切な滑らかな射影のために）イタールコホモロジーと結晶コホモロジーの現在の比較定理を任意の変種の場合に拡張する。もちろん、そのような推測はすでにさまざまな一般論で証明されています。私たちの論点は、最も一般的なそのような定理を証明することです。それは、局所系における（自明ではない！）係数による p 進体上の（剛体分析）多様体のイタールコホモロジーに対して、そして収束における係数による結晶コホモロジーに対して有効です。

（ii）積分（対数）結晶比較定理

積分結晶比較定理の正確な記述がまだ不足していることを思い出してください。しかし、最近の Bhatt-Morrow-Scholze の研究では、ねじれ現象を定式化/研究する方法として、Breuil-Kisin モジュールを使用することが提案されています。 Fargues によって定式化された形式。Bhatt-Morrow-Scholze の研究は、10 年以上にわたって期待されてきた積分 p 進 Hodge 理論における Breuil-Kisin-Fargues 理論および位相巡回相同性に関する Hesselholt の研究の役割を実現しています。 Bhatt-Morrow-Scholze の理論を良い還元ケースから悪い還元ケースへと拡張し、それから自明でない係数を Bhatt-Morrow-Scholze コホモロジーに統合します。すなわち、自明な局所システムではなく任意の p 進局所システムにおける係数を用いた etale コホモロジーの積分結果を証明し、さらに相対的設定における比較結果を得ることを計画します。オブジェクトそのもの。

（iii）p 進 Simpson 対応

自明ではない係数についてのパート（ii）のバージョンと、縮小が不十分なスキームとの両方が、例えば、p 進シンプソン対応の研究のために、様々な算術／幾何学的用途に必要である。Faltings の p 進 Simpson 対応を一般的な結晶の場合に拡張するには、パート（ii）で説明されているように特定の積分結晶比較理論を使用する必要があります。p 進シンプソン対応については、ヒッグス束を介したヒッチン - シンプソンの双曲型リーマン曲面の一様化理論の類推と見なすことができます。明らかに、非アナベル Hodge 理論/ p 進 Simpson 対応の研究において自分たちを曲線に限定する理由はない。 p 進 Simpson 対応を一般的な結晶の場合に拡張し、Zuo の最近の研究を拡張する予定です。高次元への p 進 Simpson 対応と p 進 Teichmuller 理論についてこれはまた私達が望月の普遍的 Teichmuller 理論を理解し/一般化するのを助けるでしょう。

（iv）絶対アナベル幾何学

望月の双曲線に対する望月の絶対的なアナベルの定理を一般的な場合、すなわち一般的な双曲線について一般化することを目指しています。望月が彼の論文で述べたように、グロタンディック予想の彼の証明は p 進ホッジ理論の応用として見ることができる。しかし望月の証明では、彼は以前に Faltings によって証明された（曲線のための）積分 Hodge-Tate 比較定理のみを必要としています。我々の一般的な積分結晶比較理論は、その Hodge-Tate の対応物よりもかなり深く、一般的な絶対的なアナベルの定理を証明する手助けとなることを期待しています。

３．研究の方法

セクション「研究の目的」にリストされているトピックは本質的に互いに関連しているので、同時に研究されました。これらすべてのプロジェクトに共通のテーマは、代数幾何学および代数的数論からの標準的なテクニックと共に、p 進ホッジ理論からの基本的な結果の首尾一貫した使用です。私の知識と以前の結果は、これらの目的を達成するための強固な基盤を提供しました。

さらに、私は同僚とコラボレーションすることの重要性を強調しています。同僚と、アイデアを共有し、労働を分担させます。

前述のように、私たちのプロジェクトは互いに並行して行われてきました。これはすでにリスクを体系的に軽減しています。あるプロジェクトが計画通りに進まなかった場合は、他のプロジェクトにもっと力を入れました。さらに、あるトピックの進歩は私が他のものを理解するのを助け、さらなる発展につながりました。このような強化が行われたとき、特に他の方向への進歩が少なかったときは、この方向により多くのエネルギーを費やすことになり、それが研究期間中の時間とエネルギーを最大限に活用するのに役立ちました。これは体系的なリスク管理方法でした。さらに、現在の方法では予想よりも進捗が悪くなった場合に備えて、問題を攻撃してリスクをさらに下げるための方法を常に少なくとも 2 つ含めました。

以下では、前のセクションで説明したプロジェクトの方法論についてさらに詳しく説明します。

（i）p 進ホッジ理論における準安定予想

これのために私達は準安定的な減少の堅い分析的な変化を取扱うことに減る。 p-adic Hodge に最初に導入されたように、この縮小ステップは基本的に Veovodsky の h トポロジーを使用するために機能します。

さらに、準安定削減のケースに対処するためには、対数版のプロタールサイト、すなわちクンマープロタールサイトを開発する必要がある。これは私の前の「モジュラー曲線のための過収

束 Eichler-Shimura 射」に書かれている通りです。我々は、様々な周期シーブのガロアコホモロジーのより詳細な計算を与える。この対数の場合はより複雑ですが似ています。 Kummer のプロトータルトポスによるアプローチは、他の既存のアプローチよりも柔軟性があります。絶対的な場合（つまり単一のスキームの場合）から相対的な場合（つまりスキーム間の射影の場合）です。比較定理を用いて達成する。

（ii）積分（log）結晶比較理論

Bhatt-Morrow-Scholze コホモロジーのサイト理論的記述を求めます。 BMS 理論は、他のいくつかのコホモロジー理論を統合しています：イタールコホモロジー、ドラムコホモロジー、結晶コホモロジー。しかし、BMS コホモロジーは、p 進ホッジ理論に現れるこれらのコホモロジーを統一するように設計された、大規模な滑車群のコホモロジーとして得られます。このようなサイト理論的定式化により、Bhatt-Morrow-Scholze の仕事を自明な係数を持つ Etale コホモロジーの場合から任意の p 進ローカルシステムの係数を持つ Etale コホモロジーの場合まで拡張することができます。それから私達はよい減少の場合から悪い減少の場合に行くことに着手しました。このために、パート (i) で行ったように、やはり準安定縮小の場合に縮小する。さらに、全体的な設定は、相対的な設定、すなわちオブジェクト自体に対してだけではなく、スキーム間の射影に関して上記の結果を得るのに十分な柔軟性を有する。最後に、積分 p 進ホッジ理論の研究は合理的理論、すなわちパート（i）の研究に基づいていなければならないことを述べたいと思います。

（iii）p 進シンプソン対応

Zuo らの作品を拡張する。高次元の場合への p 進シンプソンの対応について、p 進ホッジ理論の研究で常に行われてきたように、我々は最初に正しい絵を得るためにアーベル多様体の場合を研究する。それから我々は前述の Faltings の理論の一般化と S.望月による曲線のための p 進 Teichmuller 理論のさらなる理解の両方を必要とする。上述したように、p 進シンプソン対応のような応用において、自明でない係数をもつ一般形式スキームのための比較定理を持つことは、根本的な問題だけでなく必要なステップでもあります。一方、p 進シンプソン対応の研究における必要性は、積分 p 進ホッジ理論の正しいバージョンを探す方法を私たちに与えるでしょう。したがって、この部分は部分（ii）と並行して行うことができます。

（iv）絶対的なアナベルの幾何学

厳密な Belyi 型の双曲線の場合から一般双曲線の場合まで、数体と p 体上の双曲線の基本群から関数体と基底体の再構成に関する望月の結果を拡張しようとしています。そして、特に絶対形式でのグロタンディックの予想の証明、すなわち、基本体群の基本群から絶対ガロア群への拡大写像について言及していない。これは自然に p 進ホッジ理論の応用と見なすことができます。

以下では、2017 年度から 2018 年度の研究期間における各学期の具体的な計画を提示します。

2017 年度：

学期 1：私は主に p 進ホッジ理論の半安定比較定理に関するプロジェクト（i）に取り組んでいます。プロジェクト（i）の進捗状況を把握しながら、Bhatt-Morrow-Scholze 理論とヘッセルホルトの位相幾何学的相同性に関する研究との関係を調べることによって、プロジェクト（ii）を積分 p 進ホッジ理論で始める。

学期 2：我々は、プロジェクト（i）を終えて、Bhatt-Morrow-Scholze コホモロジーのサイト理論的基礎を与えることによって、整数 p 進ホッジ理論に関する研究プロジェクト（ii）を続ける。 Bhatt-Morrow-Scholze 理論をさらに理解した上で、最初にアーベル多様体の場合を検討することによって、p 進シンプソン対応に関するプロジェクト（iii）を開始するのが良い時期です。私達は積分 p 進ホッジ理論についてプロジェクト（ii）に取り組み続けています。この段階では、自明ではない係数、すなわち局所システムにおける係数を用いたイタールコホモロジーの積分結果を証明するために、既に得られたサイト理論的な Bhatt-Morrow-Scholze 理論を用いることができる。これは既に積分 p 進ホッジ理論におけるかなり一般的な結果です。さて、p-adic Simpson 対応の Faltings の主定理を一般的な結晶の場合に一般化し始め、Zuo の作品の高次元への一般化を始めます。

2018 年度：

第 3 学期：最後に結晶の場合（自明でない係数を持つ）を準安定の場合、次に一般の場合に拡

張することにより、整数 p 進ホッジ理論のプロジェクト（ii）を終了します。これで p-adic Simpson 対応についての Faltings の主定理に関する作業を終了することもできます。積分 p 進ホッジ理論をこのように深く理解することで、潜在的に準安定なガロア変形環の特異点、潜在的な算術応用をさらに研究することが可能になることは言及に値する。

学期 4：私達は Zuo の仕事の一般化に関するプロジェクト（iii）の最後の部分を終えた。これは特に p 進数の Teichmuller 理論の高次元版を提供します。一方、私たちは、プロジェクト（iv）の主目的である p 進数体上の一般的な双曲線に対するアナベラの予想の絶対版を証明し始めます。

４．研究成果

(1) 研究期間中、私は p-adic Hodge 理論の結晶比較定理をより一般的な準安定比較問題について、自明でない係数を使って、そして相対的な設定で続けてきました。私は、積分 p 進 Hodge 理論と位相幾何学的 Hochschild 相同性に関する Bhatt-Morrow-Scholze の研究を徹底的に研究した。一方、Bhatt-Morrow-Scholze コホモロジーのサイト理論的基礎に関する Bhatt と Scholze のプロジェクトが進行中です。この進歩の助けを借りて、私は自明ではない係数を用いて、etale と crystal コホモロジーの積分結果を定式化することができます。そのような結果の相対バージョンは、さらに調査が必要です。

(2) 一方、上記の進歩のおかげで、H30 でシンプソン対応にかなり長い時間を費やすことができました。これは、どちらの場合でも算術的な場合です。現在の段階では、私は主に低属数の双曲線、特に 0 属と 1 属の双曲線に焦点を当てています。現在、Simpson 対応の算術バージョンを作成するには、Ogus-Vologodski から始める必要があることは明らかです。これは、特性 p の理論です。そのようなアプローチは私たちを小さい Hodge-Tate 重みを持つガロア表現に制限するでしょう。一方、それは不可欠であるという利点があります。これにより、数体のほぼすべての場所にさまざまな p 進ガロア表現と Higgs モジュールを結合することができます。これは Fontaine-Mazur のようなモジュール性予想と類似性を共有します。

(3) 前述の進歩のおかげで、私は絶対的なアナベルの幾何学の方向にも発見することができました。 p 進局所場上の双曲線に対する絶対的なアナベルの予想に関する室谷の最近の研究は、セレの i 不変式を介して予想を検証する可能な方法を指摘した。 私の共同作業者と一緒に、私は枝分かれ行為が弱々しいときに状況を理解することができました。 すなわち、双曲線が基底場の弱く激しく枝分かれした拡大の後に可愛い縮約を認めるときである。 この方法は、私たちの研究プロジェクトの中心テーマである p 進幾何学によるものでもあります。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　０　件）

〔学会発表〕（計　3　件）

（1）p 進ホッジ理論と Inter-universal Teichmuller 理論の紹介。 5 時間の講義、南部科学技術大学、シンセン、中国、2018 年

（2）p 進演算と Inter-universal Teichmuller 理論の紹介。 6 時間講義、首都師範大学、北京、中国、2018 年

（3）Inter-universal Teichmuller 理論の紹介。 9 時間の講義、韓国先端研究院、ソウル、韓国、2018 年

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。