

令和元年6月23日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H06784

研究課題名(和文) 簡約型等質空間と非簡約型等質空間のコンパクトClifford-Klein形

研究課題名(英文) Compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive and nonreductive types

研究代表者

森田 陽介 (Morita, Yosuke)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：70804318

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：等質空間上の固有な作用を研究した。より具体的には、ある種の半単純対称空間  $G/H$  に対し、制限ルート系の強直交ルートを用いて、作用の固有性・余コンパクト性に関して  $G/H$  と同じ振る舞いをする非簡約型等質空間  $G/H_*$  を定義した。この  $G/H_*$  はコンパクト Clifford-Klein 形を持たない(=固有かつ余コンパクトな作用を持たない)ことが証明でき、そのことから  $G/H$  もコンパクト Clifford-Klein 形を持たないと分かる。また、いくつかの非対称な簡約型等質空間がコンパクト Clifford-Klein 形を持たないことの証明にもこの  $H_*$  を利用できる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1. コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題は、1980年代後半から様々な手法によって研究されてきたが、非簡約型の等質空間を利用して簡約型等質空間に関する結果を導くという手法は新しい。  
2. 簡約型等質空間上の固有な作用と、その「極限」(geometric transition)に現れる非簡約型等質空間上の固有な作用の間に関係がつけられる、という現象がいくつかの場合で観察されており(小林-吉野、Danciger-Gueritaud-Kassel)、今回の研究で得られた結果もその一例とみなせるかもしれない。

研究成果の概要(英文)：I studied proper actions on homogeneous spaces. When  $G/H$  is a semisimple symmetric space satisfying some condition, I constructed a homogeneous space  $G/H_*$  of nonreductive type such that a discrete subgroup of  $G$  acts properly and cocompactly on  $G/H_*$  if and only if it acts properly and cocompactly on  $G/H$ . One can prove that  $G/H_*$  does not admit a compact Clifford-Klein form (i.e. does not admit a proper cocompact action), which implies that  $G/H$  cannot have a compact Clifford-Klein form. I also found that  $H_*$  can be applied to the nonexistence of compact Clifford-Klein forms in some nonsymmetric cases.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学 Lie群 等質空間 固有な作用 Clifford-Klein群

## 1. 研究開始当初の背景

$G$  の離散部分群  $\Gamma$  が等質空間  $G/H$  に固有かつ自由に作用するとき、商空間は  $G/H$  を局所的なモデルとする多様体になる。このような多様体を Clifford-Klein 形という。  $H$  が非コンパクトな閉部分群の場合 (またはほぼ同じことであるが、  $G/H$  が  $G$ -不変な Riemann 計量を持たない場合) には、  $\Gamma$  の作用が固有とは限らないため、Clifford-Klein 形の研究は  $H$  がコンパクトな場合と比べて格段に難しくなる。1980 年代後半の小林俊行の研究 [4] に端を発し、Clifford-Klein 形の大域的なトポロジーの研究、特に、コンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題は注目を集め、様々な手法によるアプローチがこれまでに開発されてきた (Lie 群論、エルゴード理論、コホモロジーなど)。

Lie 群  $G$  が簡約なとき、  $G$  の離散部分群  $\Gamma$  が等質空間  $G/H$  に固有に作用するための必要十分条件が、  $G$  の Cartan 射影による  $H$  と  $\Gamma$  の像を用いて書けることが、小林 [4], [6] と Benoist [1] により証明されている。また、固有な作用がいつ余コンパクトになるかは、  $G$  および  $H$  の非コンパクト部分の次元と  $\Gamma$  のコホモロジー次元によって判定できる。これらを併せると、次のことがわかる：

命題 (cf. 小林 [5]):  $G$  を線型簡約 Lie 群、  $H$  を  $G$  の連結閉部分群とする。  $\mu$  を  $G$  の Cartan 射影とし、  $H$  の非コンパクト部分の次元を  $d(H)$  とする。

(a) もし  $\mu(L) \cap \mu(H) = \emptyset$  かつ  $d(L) > d(H)$  なる連結閉部分群  $L$  が存在すれば、  $G/H$  はコンパクトな Clifford-Klein 形を持たない。

(b) もし  $\mu(L) \cap \mu(H) \neq \emptyset$ ,  $d(L) \leq d(H)$  かつ  $G/L$  がコンパクトな Clifford-Klein 形を持たないような連結閉部分群  $L$  が存在すれば、  $G/H$  はコンパクトな Clifford-Klein 形を持たない。

## 2. 研究の目的

コンパクトな Clifford-Klein 形が存在するための新しい必要条件を与えることが研究の目的である。より具体的には以下の通り。

上述の小林の論文 [5] では、  $H$  と  $L$  が簡約な場合に限って議論を展開していたが、議論を定式化する上では簡約性は必要ない。とはいえ、非簡約な閉部分群の場合 Cartan 射影の計算は困難であり、非簡約な状況にまで枠組みを広げても、新しい有意義な例は得られないであろうと思われていた (少なくとも研究代表者はそう思っていた)。しかし実は、非簡約な閉部分群でも Cartan 射影が綺麗になる場合が、小林自身により発見されている [6]。この非簡約な閉部分群に対して、上述の命題 (b) と研究代表者による過去の研究 [10] を組み合わせると、簡約型等質空間  $SL(p+q, \mathbb{R})/SO(p, q)$  がコンパクトな Clifford-Klein 形を持たないことが証明できるとわかった。そこで、この例の背後にある Lie 群論的・幾何学的な構造を明らかにし、同様の振る舞いをする例を系統的に構築することを目指した。

## 3. 研究の方法

(1) 簡約型等質空間の中でも、半単純対称空間は特に良いクラスであり、精緻な構造論が確立されている。上述の  $SL(p+q, \mathbb{R})/SO(p, q)$  は半単純対称空間の例である。この例での計算を半単純対称空間の理論の枠組みで捉えなおすことで、同様の振る舞いをする例を構築することを試みた。

(2) 半単純対称空間ではない簡約型等質空間の場合にも、非簡約な閉部分群の Cartan 射影と比較することでコンパクト Clifford-Klein 形の非存在を証明できる場合がないか考察した。半単純対称空間でない場合には一般的な構造論がないため、別の方法が必要である。本研究では次の方法を検討した。

(2-a) 簡約部分群の Cartan 射影と、その「共役極限」(Cooper-Danciger-Wienhard [2]) として現れる非簡約な閉部分群の Cartan 射影を比較する。

(2-b) Cartan 運動群については、簡約 Lie 群と同様に KAK 分解が成り立つことに注目し、簡約 Lie 群に埋め込まれた Cartan 運動群の Cartan 射影を計算する。

(2-c) 非簡約な閉部分群が (1) の例を閉部分群として含む場合に、(1) で行った Cartan 射影の計算の議論を「部分的に」適用することで、Cartan 射影を上から評価する。

(3) 群作用と固有性に関わる幾何学に関する研究をさらに発展させるため、理論の基礎部分の再検討と、萌芽的なアイデアの考察を行った。

## 4. 研究成果

(1)  $G/H$  が半単純対称空間で、  $H$  の associated 対称部分群  $H^a$  が非コンパクトな中心を持つならば、  $G/H$  はコンパクト Clifford-Klein 形を持たないことを、以下に述べるようにして証明した。

$G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  を、 $H^a$  の中心の双曲的な元で固有空間分解し、正の固有値の固有空間たちを集めた部分 Lie 環を  $\mathfrak{u}$  とする。さらに、 $\mathfrak{u}$  に対応する  $G$  の閉部分群を  $U$  とする (horospherical 部分群)。  $H$  が  $G$  の対称部分群であることから、 $U$  は可換であることが簡単にわかる。逆に、 $G$  の可換な horospherical 部分群  $U$  が与えられると、そこから対称部分群  $H$  が定義できる。この状況で、 $G$  の Cartan 射影による  $H$  と  $U$  の像が等しいことを、 $G$  の制限ルート系の強直交ルートをを用いることで証明した。  $H$  と  $U$  の非コンパクト次元は等しいため、 $G/H$  と  $G/U$  は作用の固有性・余コンパクト性について全く同じ振る舞いをするようになる。さらに、研究代表者による過去の研究 [10] を用いることで、 $G/U$  がコンパクトな Clifford-Klein 形を持たないことを証明した。したがって、 $G/H$  もコンパクト Clifford-Klein 形を持たないことになる。この種の  $G/H$  がコンパクト Clifford-Klein 形を持たないことは、研究代表者の過去の研究によって既に分かっていた [11]。しかし既知の証明は Lie 環のコホモロジーと de Rham コホモロジーを比較する手法を用いたものであり、今回得られた証明とは大きく異なっているように思われる。

(2) (2-a) の方法では新しい例は得られなかったが、(1) の例の幾何学的描像が明らかになった。すなわち、(1) の対称部分群  $H$  の、 $H^a$  の中心の元に関する共役極限として、 $H$  の極大コンパクト群と  $U$  の半直積群  $H_-$  が現れる。したがって、 $G/H$  の Clifford-Klein 形が与えられると、 $[-, +]$  でパラメライズされた Clifford-Klein 形の族が定義できることになる。簡約型等質空間上の固有な作用と、その「極限」(geometric transition [2]) として現れる非簡約型等質空間上の固有な作用の間に関係がつけられる、という現象がいくつかの場合に観察されているが (小林-吉野 [7]、Danciger-Guéritaуд-Kassel [3])、我々の研究で得られた結果もそうした現象の 1 つとみなせる、ということかもしれない。

(2-b) の方法の元となったのは、

- ・ (2-a) で現れる  $H_-$  は  $H$  の Cartan 運動群である。

- ・ Cartan 運動群に対しては簡約 Lie 群と同様に KAK 分解が成り立つ。

という観察である。このことから、(非対称な場合でも) 簡約 Lie 群に埋め込まれた Cartan 運動群の Cartan 射影は綺麗に記述できる場合があるのではないかと考えていた。しかし、今のところ価値のある結果は得られていない。

(2-c) の方法によって、 $SL(n, K)/SL(m, K)$  ( $K$  は  $R, C, H$  のいずれか) のコンパクト Clifford-Klein 形の存在に対する障害が得られた。小林 [5] の手法により、「 $n$  が大体  $m$  の  $3/2$  倍以上」のときにコンパクト Clifford-Klein 形が存在しないことが分かっていたが、考える閉部分群を非簡約なものにまで拡げることで「 $n$  が大体  $m$  の  $5/4$  倍以上」のときにまで結果を改良できることがわかった。なお、(少なくとも  $K=R$  の場合には)  $n-m > 2$  のときにコンパクト Clifford-Klein 形が存在しないことが Labourie-Zimmer [8] によって証明されているが、彼らの証明は超剛性定理を用いるものであり、今回得られた証明は異なるメカニズムに基づく。なお、この結果は  $K=C, H$  の場合 (研究代表者の知る範囲では) 新しい例を一部含んでいる。

(3) コンパクト Clifford-Klein 形の存在に対するコホモロジー的な障害が、研究代表者の過去の研究 [9] によって得られていたが、この障害が適用可能な半単純対称空間を分類する論文を完成させた (雑誌論文 (2))。その他、固有な写像や固有な作用の種々の定義の比較 (基礎づけ)、力学系の Conley 指数の定義の再考、ある種の ping-pong 補題を用いて自由群よりも複雑な群の固有な作用を構成する方法の検討、などを行った。

< 引用文献 >

- [1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Ann. of Math.* (2) 144 (1996), 315-347.
- [2] D. Cooper, J. Danciger, and A. Wienhard, Limits of geometries. *Trans. Amer. Math. Soc.* 370 (2018), 6585-6627.
- [3] J. Danciger, F. Guéritaуд, and F. Kassel, Geometry and topology of complete Lorentz spacetimes of constant curvature, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 49 (2016), 1-56.
- [4] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* 285 (1989), 249-263.
- [5] T. Kobayashi, A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.* 67 (1992), 653--664.
- [6] T. Kobayashi, Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups, *J. Lie Theory* 6 (1996), 147-163.
- [7] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces revisited, *Pure Appl. Math. Q.* 1 (2005), 591-663.
- [8] F. Labourie, R. J. Zimmer, On the non-existence of cocompact lattices for  $SL(n)/SL(m)$ , *Math. Res. Lett.* 2 (1995), 75-77.
- [9] Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms, *J. Differential Geom.* 100 (2015), 533-545.
- [10] Y. Morita, Homogeneous spaces of nonreductive type that do not model any compact

manifold, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 53 (2017), 287-298.

[11] Y. Morita, A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms, Selecta Math. (N.S.) 23 (2017), 1931-1953.

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計2件)

(1) Yosuke Morita, Proof of Kobayashi's rank conjecture on Clifford-Klein forms, J. Math. Soc. Japan に掲載決定(査読有)

(2) Yosuke Morita, Semisimple symmetric spaces that do not model any compact manifold, J. Lie Theory 29 (2019), 493-510 (査読有)

〔学会発表〕(計7件)

(1) 森田陽介、非 Riemann 等質空間のコンパクト商のコホモロジー  
日本数学会 2018 年度秋季総合分科会、岡山大学、2018 年 9 月 24 日(幾何学分科会、特別講演)

(2) Yosuke Morita, Cohomological obstructions to the existence of compact Clifford-Klein forms  
Seminar, Korea Institute for Advanced Study, 2018 年 7 月 24 日-25 日(全2回)

(3) 森田陽介、等質空間の Clifford-Klein 形のコホモロジーについて  
ワークショップ：幾何学的群論の新展開、ルネッサ赤沢、2018 年 2 月 6 日

(4) 森田陽介、簡約型等質空間のコンパクト商と不変式  
2017 年度表現論シンポジウム、かんぼの宿 石和、2017 年 11 月 29 日

(5) Yosuke Morita, The existence problem of compact Clifford-Klein forms  
Rigidity School, Nagoya 2017, 名古屋大学、2017 年 11 月 23 日-26 日(全4回)

(6) 森田陽介、等質空間の Clifford-Klein 形のコホモロジーについて  
広島幾何学研究集会 2017、広島大学、2017 年 10 月 5 日

(7) Yosuke Morita, A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms  
The Third Japanese-Spanish Workshop on Differential Geometry, Instituto de Ciencias Matemáticas, 2017 年 9 月 18 日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6 . 研究組織

(1)研究分担者

(2)研究協力者

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。