様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 ２０ 日現在

機関番号：３２６２１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2017～2018
課題番号：１７Ｈ０７１０３

研究課題名（和文）クラスター代数と、結晶基底、及び幾何結晶の関係について

研究課題名（英文）Relations between cluster algebras and crystal bases, geometric crystals

研究代表者
金久保　有輝（Kanakubo, Yuki）

上智大学・理工学部・研究員

研究者番号：７０８０２４８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：単純代数群Gと、そのダブルBruhatセルG(u,e)を考えた。セルは幾何結晶構造を持ち、更にその座標環はクラスター代数構造を持つ。幾何結晶の作用が、セルの座標環から他のセルの座標環の適切な局所化への埋め込みを導くことがわかった。G(u,e)をクラスター多様体と見なし、幾何結晶の作用によって、A座標、X座標がどのように変化するかを明らかにした。
　また、セル上に、ヴァーマ加群の結晶基底に対応するdecorationを構成し、多面体表示の基本性質を明らかにした。
　GがA,D,E型の場合、アファイン量子群の表現のq指標が、G(u,e)上のクラスター変数の式で書けることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義
結晶基底は、代数的組み合わせ論やモジュラー表現論、統計物理やセルオートマトンなど、多くの分野に応用されている。多面体表示やdecorationの性質を明らかにすることで、結晶基底の基礎研究に貢献するだけでなく、結晶基底と関連する多くの分野の発展を促すという意義がある。また、セル上のクラスター変数と結晶基底の関係を明らかにすることで、クラスター理論に「クラスター変数やq指標の組み合わせ論的な計算方法、及び、結晶基底の言葉での解釈」という実用的で、かつ、新たな研究の方向性を与える結果を提供する、という意義がある。

研究成果の概要（英文）：I considered a simple algebraic group and its double Bruhat cell G(u,e). The cell has a geometric crystal structure and its coordinate ring has a cluster algebra structure. I shown that the action of geometric crystal yields an embedding of algebras from the coordinate ring of the cell to a localization of the coordinate ring of another cell. I also revealed how the cluster A-coordinate and X-coordinate change via the action of geometric crystal.
 I constructed a decoration function corresponding to the crystal base of the Verma module. I also revealed a fundamental properties of the polyhedral realization.
 In the case G is of type A, D or E, I revealed that the q-characters of representations of the quantum affine algebras can be written in terms of cluster variables on a cell.

研究分野：量子群の表現論

キーワード：結晶基底　クラスター代数　多面体表示　幾何結晶

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

簡約代数群 G と、そのベキ単部分群 N に対し、座標環 C[N]は、**双対標準基底**と呼ばれる良い性質を持つ基底を持つ。簡約代数群に関係する様々な代数多様体(例えば、Schubert セル、ダブル Bruhat セル)の座標環の中にも、双対標準基底と似た性質を持つ生成元(**クラスター変数**)が存在することが予想され、**クラスター代数**が導入された。ダブル Bruhat セルは、Borel 部分群 B,B_- とワイル群の元 u,v を用いて、$G^{u,v}:=BuB\cap B_-vB_-$ と定義されるセルである。近年では、アファイン量子群の表現の Grothendieck 環がクラスター代数の構造を持ち、既約表現たちが、クラスター変数となることが示された[2]。このように、「クラスター代数」という構造に着目し、リー環論や座標環理論における重要な基底や、アファイン量子群の表現の性質を包括的に研究する、というのが、近年の動向の一つである。

２．研究の目的

(1) クラスター代数の性質に関しては未解決な問題が多く、また、セル $G^{u,v}$ の座標環がクラスター代数であることが示されたのも最近である[1]。クラスター理論に新たな視点を加えることを目的に、応募者は、量子群の表現論における**結晶基底**と、座標環のクラスター代数構造の関係について調べることにした。

(2) (1) で明らかにした関係をもとに、結晶基底と、座標環のクラスター代数構造を意味づける理論（アファイン量子群の表現論、クラスター多様体理論）との関係を明らかにすることも目的とした。

３．研究の方法

(1)これまでの研究で、$G^{u,e}$ 上のクラスター変数が、結晶基底の単項式表示で表せるということがわかっていた。また、$G^{u,e}$ 上のクラスター変数は、ADE 型アファイン量子群の表現論における q-指標と似た形をしている。そこで、$G^{u,e}$ 上のクラスター変数と q-指標を比較し、q-指標と結晶基底の新たな関係性を見出す。

(2)単純代数群 G のセル $G^{u,e}$ の座標環のクラスター変数に、幾何結晶の作用、特に柏原作用素に対応する作用を施し、どのような関数になるかを調べる。幾何結晶の作用の定義は明瞭であるため、直接計算で研究を進めていくことができる。

(3) ダブル Bruhat セル $G^{u,e}$ をクラスター多様体と見なすと、X 座標、A 座標という二種類の座標がセル上に定義される。幾何結晶の作用を施したとき、この X 座標、A 座標がどのように変化するかを明らかにすることで、幾何結晶理論とクラスター多様体理論の関係を明らかにする。

４．研究成果

(1)パリ・ディドロ大学の大矢浩徳氏、上智大学の中島俊樹氏と議論をしたところ、GがA,D,E型の単純代数群である場合、アファイン量子群の表現の(truncated)q-指標を、ダブルBruhatセル$G^{u,e}$上の適当なクラスター変数を座標変換したものの式で書き表せるということが明らかになった。このことから、$G^{u,e}$上のクラスター変数に、アファイン量子群の表現論的な意味づけがなされたことになる。$G^{u,e}$上のクラスター変数には幾何結晶の作用を施すことができるため、この結果から、q-指標と幾何結晶の作用の関係を調べるという新たな研究課題が生まれた。

(2)単純代数群のダブルBruhatセル $G^{u,e}$上の座標環と、幾何結晶の作用の関係を調べた。その結果、幾何結晶の作用が、セル上の座標環から他のセル上の座標環の適切な局所化への埋め込みを導くことがわかった。この埋め込みは、元のセル上の初期クラスター変数を、他のセル上の初期クラスター変数に対応させる。この埋め込みと、座標環上のmutationとのcompatibility が成り立つこともわかった。これにより、幾何結晶作用とクラスター代数理論の一つの関係が明らかになった。

(3) ダブルBruhatセル $G^{u,e}$ をクラスター多様体と見なし、幾何結晶の作用を施したとき、このX

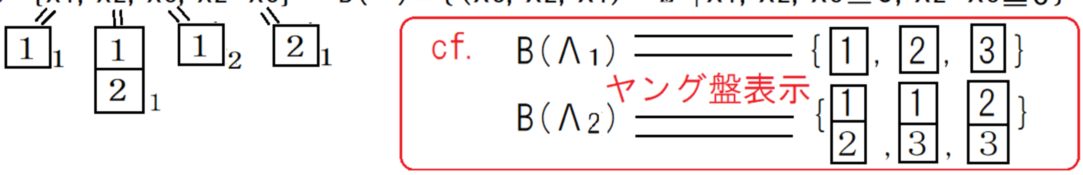
座標、A座標がどのように変化するかを明らかにした。その結果、X座標、A座標上の幾何結晶の作用は、「positive」という性質を持つことがわかった。この結果から、結晶基底における重要な写像を、クラスター多様体の言葉で表すという新たな研究課題を得た。

(4) Positive な幾何結晶と decoration というセル $G^{w0,e}$ 上の関数を用いることで、結晶基底 B(λ)の多面体表示を得ることができる(w0 は最長元)。多面体表示は、結晶基底の各元を、ユークリッド空間の polyhedral cone の格子点で表す方法である。 この先行研究をもとに、結晶基底 B(∞)の多面体表示を得るための decoration を、セル $G^{w0,e}$ 上に構成することができた。現在その論文を執筆中である。2019 年 2-3 月にモスクワに出張し、この結果と、(3)で述べた結果について、G.Koshevoy 氏と議論した。その結果、今後、他の結晶基底の多面体表示を実現する decoration を共同で研究していくことになった。

(5) Positive な幾何結晶から結晶基底の多面体表示が得られるため、(3)で新たに獲得した課題を研究していくには、多面体表示の基本性質を明らかにすることが重要である。そこで、古典型のリー環に付随する結晶基底 B(∞)の多面体表示の明示公式を構成した。多面体表示を構成するには、添え字の無限列 ι を一つ固定する必要がある。

$\iota=(\cdots,2,1,2,1,2,1)$, g : A_2 型

$\Rightarrow \Xi_\iota=\{x_1, x_2, x_3, x_2-x_3\} \Rightarrow B(\infty)\cong\{(x_3, x_2, x_1)\in\mathbb{Z}^3 \mid x_1, x_2, x_3\geqq 0, x_2-x_3\geqq 0\}$



[3]では、ι が「正値条件」という条件を満たすとき、多面体表示を実現する不等式の集合 Ξ_ι を計算する方法が示されている。申請者は、ι に対するadapted という確かめやすい条件を提案し、このadaptedという条件が、正値条件の十分条件になっていることを証明した。そして ι がadaptedな場合、[3]の方法を使って、多面体表示の明示公式を、ヤング盤の言葉で明らかにした。

<引用文献>

[1] K.R.Goodearl, M.T.Yakimov. arXiv:1602.00498.
[2] D.Hernandez, B.Leclerc. Duke Math. J. Vol.154. No.2(2010).
[3] Nakashima T., Zelevinsky A., Adv. Math. 131, no. 1, (1997).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① Y. Kanakubo, T. Nakashima,
Adapted Sequence for Polyhedral Realization of Crystal Bases,
arXiv: 1904.10919, pp1-37 (2019). (査読なし)

② Y. Kanakubo, T. Nakashima,
Geometric crystals and Cluster ensembles in Kac-Moody setting,
arXiv:1807.11684, pp1-30 (2018). (査読なし)

〔学会発表〕（計　3　件）

① Y. Kanakubo, Positivity condition of Polyhedral realizations of crystal bases, Crystals and Their Generalizations, 大阪市立大学, 2019.

② Y. Kanakubo, Positivity condition of Polyhedral realizations of crystal bases, Meeting of crystal basis and quantum algebras and superalgebras, 富山大学, 2018.

③ Y. Kanakubo, Cluster algebras of finite type and crystal bases, Infinite Analysis 17, Algebraic and Combinatorial Aspects in Integrable Systems, 大阪市立大学, 2017.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。