様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　６ 日現在

機関番号：３２６６５

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2019

課題番号：１７Ｋ０００１８

研究課題名（和文）グラフのハミルトン条件と計算量

研究課題名（英文）Hamiltonicity of graphs and its complexity

研究代表者

斎藤　明（SAITO, Akira）

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：９０１８６９２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：グラフの全ての頂点を通るサイクルを、そのグラフのハミルトンサイクルという。ハミルトンサイクル存在のための十分条件およびハミルトンサイクルの一般化となる構造を、計算量理論から得られている知見を通して眺め、ハミルトン性の困難さの本質に迫った。
toughness と binding number とよばれる不変量は、ハミルトン性に関して類似の振る舞いを示すだろうと予想されていたが、本研究は両者が全く異なる振る舞いを示すことを明らかにした。また平面性、k-trail、サイクルの弦との関連を解明した。さらにグラフに 2-因子が存在することを保証する禁止部分グラフの２つ組と３つ組を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ハミルトンサイクルはグラフ理論における重要なテーマであると同時に、土木計画、交通計画、巡回セールスマン問題などの応用にも密接に関わる。一方その存在・非存在の決定はNP-完全であり、極めて困難な問題である。本研究はこれまでグラフ理論で得られてきたハミルトンサイクル存在のための十分条件やハミルトンサイクルの拡張概念に計算量の立場から光を当て、その困難さがどこに潜むのかを探った。得られた研究成果はハミルトン性の難しさの源に対する知見を与えると同時に、上記の応用分野に１つの指針を与えることになる。

研究成果の概要（英文）：A hamiltonian cycle in a graph G is a cycle which contains every vertex of G. A hamiltonian graph is a graph which contains a hamiltonian cycle. Many sufficient conditions for hamiltonicity have been obtained and a number of generalizations of hamiltonicity have been proposed in graph theory. We have reviewed them from the viewpoint of complexity.
In this research, we have put a particular focus on toughness and the binding number. Many graph theorists believe that their behaviors to hamiltonicity are similar. However, we have revealed that their effects on matchings in graphs are completely different, which strongly suggests that their behaviors to hamiltonicity also differ. We have also obtained a number of new insights into the relationship between matchings and planarity, k-trails and the distribution of chords in a cycle. Moreover, we have characterized the pairs and the triples of forbidden subgraphs that force the existence of a 2-factor in graphs.

研究分野：グラフ理論

キーワード：ハミルトンサイクル　計算量　2-因子

1. 研究開始当初の背景

グラフの全ての頂点を通るサイクルを、そのグラフの**ハミルトンサイクル**とよぶ。ハミルトンサイクルを持つグラフを**ハミルトングラフ**、もたないグラフを**非ハミルトングラフ**とよぶ。一般のグラフについて、そのグラフがハミルトングラフであるか否かを問う問題は NP-完全問題である。従って多項式時間判定につながるようなハミルトンサイクル存在のための必要十分条件は知られていない。そこでグラフ理論におけるハミルトン性に関する多くの研究は、ハミルトンサイクル存在のための十分条件を求めることに焦点を当てている。

こうした十分条件を計算量の観点から考える。例として Dirac の定理を考える。グラフ G の最小次数を $\delta(G)$ と表す。

定理 A (Dirac の定理)**.** 3 以上の整数 n について、位数 n のグラフ G が $\delta(G) \geq \frac{1}{2}n$ を満たせば、G はハミルトンである。

この定理はハミルトン性に関する十分条件なので、入力を $\delta(G) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$ を満たすグラフに限定すれば、ハミルトンサイクルの存在の問に常に “Yes” を返せばよく、ハミルトン性は $O(1)$ で判定される。一方、この定理は最小次数の条件に関して最良である。すなわち $\delta(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - 1)$ を満たす非ハミルトングラフが無数に存在する。従って入力するグラフを $\delta(G) \geq \frac{1}{2}(|V(G)| - 1)$ を満たすものに拡張すると、それがハミルトンであるか否かの問に $O(1)$ で答えることはできない。

しかし、位数 n 最小次数 $\frac{1}{2}(n-1)$ である非ハミルトングラフは決定されており、それらは多項式時間で認識される。すなわち入力を $\delta(G) \geq \frac{1}{2}(n-1)$ を満たすグラフに拡張すると、判定問題は $O(1)$ ではないものの、まだクラス P に属している。一般のグラフについての判定問題が NP-完全であるので、計算量の観点からは中間的な状況にある。

別の例としてクローフリーグラフを上げる。グラフ G が $K_{1,3}$ に同形な誘導部分グラフを含まないとき、G はクローフリーであるとよばれる。Matthews と Sumner は 1984 年に 4-連結なクローフリーグラフはハミルトンであろうと予想している。この予想は未解決だが、Li ら [8] は 3-連結クローフリーグラフのハミルトン性を問う問題は NP-完全であることを示した。すなわちクローフリーグラフでは 4-連結の仮定の下でハミルトン性判定は $O(1)$ と予想されているが、連結度を 3 に緩和すると NP-完全問題になる。このように、ハミルトン性の十分条件の中には、条件の緩和による計算量の増加が緩やかなものと、不連続的なものが存在する。

グラフ G の k-正則な全域部分グラフを G の ***k*-因子**とよぶ。ハミルトンサイクルは連結な 2-因子である。この意味で 2-因子とハミルトンサイクルは類似した構造と考えられる。実際、グラフ理論では、ハミルトンサイクルと 2-因子の存在を区別できない十分条件も数多く存在する。一方、一般のグラフに 2-因子が存在するか否かは多項式時間で判定でき、NP-完全であるハミルトン性と大きな差がある。

2. 研究の目的

前項で述べたように、グラフのハミルトン性に関する十分条件の中には、最良性の境界近辺の振る舞いが計算量の観点から異なるものがある。またグラフ理論ではハミルトン性と 2-因子の存在を区別できない十分条件が多数あるが、計算量的には明確な差異が示されている。そこで本研究では、計算量で差異が示されているハミルトン性の十分条件に関する知見を集め、またハミルトン性と 2-因子の差異にグラフ理論から光を当てることにより、ハミルトン性の本質に迫ることを目的とした。

3. 研究の方法

グラフの 1-因子はそのグラフの完全マッチングに他ならない。マッチングに関しては得られている知見が多い。そこで始めに 1-因子について研究を進めた。グラフ G の任意の k 本の独立辺について、それらの辺を含む完全マッチングが存在するとき、G は ***k*-拡張可能**であるという。本研究はまずグラフの拡張可能性を調べた。

次にグラフの 2-因子存在に関する十分条件を調べた。連結グラフ H について、H に同形なグラフを誘導部分グラフに含まないグラフは ***H*-フリー**なグラフとよばれる。また連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ が与えられたとき、任意の $H \in \mathcal{H}$ について H-フリーであるグラフを **$\mathcal{H}$-フリーグラフ**とよぶ。これまでのところ、$|\mathcal{H}| \leq 2$ なるグラフの集合 $\mathcal{H}$ について 2-連結な $\mathcal{H}$-フリーグラフがハミルトンとなるような $\mathcal{H}$ が決定されている。一方 $|\mathcal{H}| = 3$ なる $\mathcal{H}$ については決定されていない。そこで本研究では 2-因子について同じ方向の研究を進め、ハミルトン性との差異を観察した。

研究の後半ではハミルトンサイクルを一般化した構造についてそれらが存在する十分条件を調べ、ハミルトン性の十分条件と比較した。正整数 k について、最大次数が $2k$ 以下であるオイラー回路を ***k*-trail** とよぶ。この定義の下でハミルトンサイクルは全域 1-trail であり、$k \geq 2$ のとき k-trail はハミルトンサイクルよりも弱い構造である。

一方サイクル上で隣り合わない 2 頂点を結ぶ辺をそのサイクルの**弦 (chord)** とよぶ。注目しているサイクルに弦を見出すことは、ハミルトン性よりも強い性質を示すための標準的な手法である。

そこで本研究代表者は k-trail と弦の存在に焦点を当てて研究を進めた。

4. 研究成果

研究方法で述べた具体的な主題について、それぞれ以下のような成果を得た。

1. ハミルトン性と 1-因子の関係

非負整数 m, n と位数が $2m+2n+2$ 以上の偶数であるグラフ G について、$|M|=m$, $|N|=n$ でありかつ $M \cup N$ が独立（$M \cup N$ の中に端点を共有するような 2 辺が存在しない）であるような任意の M, $N \subset E(G)$ について、$M \subset F$ かつ $M \cap N = \emptyset$ となるような完全マッチング F が存在するとき、G は $\boldsymbol{E(m,n)}$ を満たすという。性質 $E(m,n)$ はマッチングの拡張可能性を一般化した概念である。ハミルトン性に関わるグラフの不変量の中には、マッチングの拡張可能性と関連するものが多い。本研究では特に tougnhess と binding number とよばれる不変量について、性質 $E(m,n)$ との関連を調べた。

t を非負実数とする。また $w(G)$ をグラフ G の成分数とする。もしグラフ G が $w(G-S) \geq 2$ となる任意の $S \subset V(G)$ について $|S| \geq t \cdot w(G-S)$ を満たすとき、G は ***t*-tough** であるとよばれる。また G が t-tough であるような最大の値 t を G の **toughness** とよび、tough(G) と表す。Chvátal [5] は 1973 年に Toughness 予想とよばれる有名な予想を発表した。

予想 B (Toguhness 予想 [[5]). ある定数 t が存在して、任意の t-tough なグラフはハミルトンである。

この予想は現在も未解決である。また与えられたグラフの toghness を求めることは NP-困難であることも知られている。一方 1-tough な偶位数のグラフが 1-因子を持つことは簡単に分かる。この事実は Plummer [9] により拡張可能性に拡張された。

定理 C ([9]). m を正整数とするとき、位数が $2m+2$ 以上の偶数である tough$(G) > m$ を満たす任意のグラフ G は m-拡張可能である。

上記の結果は性質 $E(m,0)$ に対応する。そこでこの結果を $E(m,n)$ に拡張すべく研究を進め、以下の結果を得た。

定理 1. $(m,n) \notin \{(0,0),(0,1)\}$ なる任意の整数 m, n について、位数が $2m+2n+2$ 以上の偶数であるグラフ G が tough$(G) > m + \frac{1}{2}n$ を満たせば、G は $E(m,n)$ を満たす。

この結果は m, n に関して最良である。この定理により、$E(m,n)$ を保証する toughness について、m に関しては係数 1 で増えていくのに対し、n については係数 $\frac{1}{2}$ で増えていき、増加の係数が異なることが分かる。

グラフ G の頂点集合 $S \subseteq V(G)$ を $S \neq \emptyset$ かつ $N_G(S) \neq V(G)$ の範囲で動かし、$|N_G(S)|/|S|$ の最小値を求める。ただし $N_G(S)$ は S のいずれかの頂点に隣接する頂点の集合である。この最小値を bind(G) と表し、G の **binding number** とよぶ。Woodall [12] は位数 3 以上のグラフ G が bind$(G) \geq \frac{3}{2}$ を満たせば G はハミルトンであることを示した。一方 Anderson [2] は偶位数のグラフ G が bind$(G) \geq \frac{4}{3}$ を満たせば、G は完全マッチングを持つことを示している。

toughness と同様に、完全マッチングの存在を m-拡張可能性に取り替えると、要求される binding number の値がどう変化するかを調べ、次の結果を得た。

定理 2. 任意の非負整数 m, n と任意の正の実数 ε に対してある正の整数 $N = N(m,n,\varepsilon)$ が存在して、位数が N 以上の偶数であるグラフ G が tough$(G) \geq \frac{4}{3} + \varepsilon$ を満たせば、G は $E(m,n)$ を満たす。

定理 2 は $E(m,n)$ を保証する binding number の値は本質的に m, n の値に依存しないと言っている。これは toughness に関する $E(m,n)$ の振る舞いと全く異なっている。

本研究では平面グラフのマッチングの拡張可能性についても調べた。Plummer [10] は 3-拡張可能な平面的グラフは存在しないことを証明した。しかし Aldred と Plummer [1] は拡張できない 3 本の辺の分布を詳しく調べ、三角形分割においては、お互いにある程度離れた辺集合は拡張可能であることを示した。

グラフ G 内の空でない辺集合 F について、その最小距離 $d(F)$ を $d(F) = \min\{d_G(e,f) \mid e, f \in F, e \neq f\}$ で定める。ただし $|F| = 1$ のとき $d(F) = \infty$ とする。非負整数 m, n に対して、$|M| = m$, $|N| = n$, $d(M \cup N) \geq d$ なる任意の M, $N \subset E(G)$ に対して $M \subset F$, $M \cap F = \emptyset$ となる完全マッチング F が存在するとき、G は性質 $E_d(m,n)$ を満たすという。Aldred と Plummer [1] は偶位数の 5-連結平面三角形分割は $E_2(3,0)$ を満たすことを証明した。

上記の結果では三角形分割であることが仮定されている。これをより一般の平面的グラフに拡張するためには、各面が三角形であるという仮定をどこまで緩和できるかが鍵になる。この点に関して研究を進め、以下の結果を得た。

定理 3. G を偶位数の 5-連結平面グラフとする。もし G における高々 2 個の面を除く面が全て三角形であれば、G は $E_3(4,0)$ を満たす。

一方、指定辺を避ける完全マッチングについても研究を進め、以下の結果を得た。

定理 4. G を偶位数の 5-連結な平面グラフとする。もし G における高々 7 個の面を除く面が全て三角形であれば、任意の正整数 n に関して G は $E_4(0,n)$ を満たす。

2. ハミルトン性と 2-因子の関係

十分大きい 2-連結グラフにハミルトン性を保証する禁止部分グラフ 2 個の組は、1997 年に Faudree と Gould [7] により決定されている。一方ハミルトン性を保証する 3 つ組の研究も研究されているが、今のところ完全には決定されていない。

本研究では、2-因子に関してその存在を保証する禁止部分グラフの 2 つ組、3 つ組を調べた。ハミルトン性と 2-因子の存在に関しては計算量的に大きな差異がある。従って、2 つ組に関してはハミルトン性で得られている組よりもかなり大きな組の集合が得られ、3 つ組に関しては完全決定も可能ではないかと予想した。研究を進めてみると、その予想が正しいことが判明した。

定理 5. H_1, H_2 を位数 2 以上の連結グラフとする。ある定数 $n_0 = n_0(H_1, H_2)$ が存在して、$|G| \geq n_0$ なる最小次数 2 以上の任意の $\{H_1, H_2\}$-連結グラフが 2-因子を持つための必要十分条件は $\{H_1, H_2\}$ が $\{K_{1,3}, Z_2\}$, $\{K_{1,3}, Z_1\}$, $\{K_{1,3}, C_3\}$, $\{K_{1,3}, P_4\}$ のいずれかであることである。

ここで C_n は位数 n のサイクル、P_n は位数 n の道、Z_n は C_3 の 1 頂点と P_{n+1} の一方の端点を同一視して得られるグラフである。

上の定理において $\{K_{1,3}, Z_1\}$, $\{K_{1,3}, C_3\}$, $\{K_{1,3}, P_4\}$ のいずれかを禁止することにより得られるグラフは全て $\{K_{1,3}, Z_2\}$-フリーである。従って定理 5 は、2 つのグラフを禁止することにより最小次数 2 以上の連結グラフに 2-因子の存在を保証する禁止部分グラフの 2 つ組は本質的に $\{K_{1,3}, Z_2\}$ である、といっている。これはハミルトン性を保証する 2 つ組に比べて極めて簡単な状況であり、ハミルトン性と 2-因子の存在に関する難度の差異を示す有力な証拠となった。

さらに本研究代表者は 3 つ組に関しても研究を進め、最小次数 2 以上の連結グラフに 2-因子の存在を保証する禁止部分グラフの 3 つ組を完全に決定した。

なおこれらの結果を発表した論文は、掲載誌 Journal of Graph Theory において 2017–2018 年の Top Downloaded Paper となった。

3. ハミルトン性の一般化

1 で述べたように Chvátal の Toughness 予想は未解決だが、グラフのクラスを限定したところで部分的な解決は得られている。Broersma ら [4] は任意の 25-tough な $2K_2$-フリーグラフがハミルトンであることを証明した。また彼らは 2-tough な $2K_2$ グラフはハミルトンであろうと予想している。この予想が正しければ、toughness の値 2 は最良である。一方帰結を全域 2-trail の存在に緩和すれば、要求する toughness も $\frac{3}{2}$ に緩和できると予想している。

Broersma らの予想が正しければ、toughness はハミルトンサイクルと全域 2-trail の存在を識別できる。そこで本研究代表者は全域 2-trail に関する彼らの予想を調べ、肯定的に解決した。

定理 6. 任意の $\frac{3}{2}$-tough な $2K_2$-フリーグラフには全域 2-trail が存在する。

最小次数がハミルトン性と 2-因子存在の差異を区別できないことを考えると、toughness と全域 k-trail の組み合わせはハミルトン性に関してよりデリケートな情報を与えている。また定理 6 の証明では、求めるものをハミルトンサイクルに取り替えると本質的な困難が現れる。この困難さにハミルトン性の難しさの本質の 1 つが隠されていることも分かった。

またハミルトンサイクルをより強めた概念との関係についても研究を進めた。3 以上の整数 k に対して、位数 k のサイクルを ***k*-サイクル**とよぶ。位数 n のグラフ G が $3 \leq k \leq n$ なる任意の k に対して k-サイクルを持つとき、G は **pancyclic** であるとよばれる。ハミルトンサイクルは n-サイクルなので、pancyclicity はハミルトン性よりも強い概念である。

Dirac の定理により、$n \geq 3$ なる任意の整数 n について、位数 n かつ最小次数 $\frac{1}{2}n$ 以上のグラフはハミルトンだが、Bondy [3] は同じ仮定の下で 1 つの例外を除きそのグラフは pancyclic であることを示した。しかも Bondy はより深い事実を証明している。

定理 D ([3])**.** n を 4 以上の整数とするとき、位数 n のハミルトングラフが $|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$ を満たせば、G は pancyclic であるか、あるいは $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ である。

最小次数が $\frac{1}{2}n$ であるグラフは $|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$ を満たす。一方 $|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$ を満たすハミルトンでないグ

ラフが存在する。従って上の定理はハミルトン性を保証するために最小次数の条件が使われるが、ひとたびハミルトン性が保証されれば、その先にある pancyclicity は単に「辺が十分にある」という仮定だけで導かれると言っている。

Bondy は上の定理の証明の中で、ハミルトンサイクルの弦を利用してハミルトンサイクル上のいくつかの頂点を通らないサイクルを見つけている。従ってサイクルの弦の分布情報が非常に重要となる。

上記の状況を踏まえ、Gould は弦を持つサイクルを調べることを提唱した。グラフのサイクルに弦が存在するとき、そのサイクルを **chorded サイクル**とよぶ。また位数 $n \geq 4$ のグラフ G について、$4 \leq k \leq n$ なる任意の k に対して G が chorded k-サイクルを持つとき、G は **chorded pancyclic** であるという。Gould は他の共同研究者とともに以下の定理を証明した。

定理 E. [6] 4 以上の整数 n に対して、位数 n、最小次数 $\frac{1}{2}n$ を満たすグラフ G は chorded pancyclic であるか、または $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ または $G = K_3 \times K_2$ である。

ここで $G \times H$ はグラフ G と H の直積である。また彼らは Bondy の結果を鑑み、ハミルトングラフに関しては最小次数に関する仮定を $|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$ に置き換えられるのではないかと予想した。本研究代表者はこの予想を肯定的に解決し、より強い命題を証明した。

定理 7. G を位数 n かつ $|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$ を満たすグラフする。もし G に k-サイクルが存在すれば、$k = 4$ の場合を除き、G には chorded k-サイクルが存在する。$k = 4$ の場合には $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ と $G = K_3 \times K_2$ という 2 つの例外のみ現れる。

上の定理では G にハミルトン性が仮定されていないことに注意されたい。実は chorded k-サイクルの存在はハミルトン性と無関係であり、$|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$ なるグラフ G に対しては、個々の k に対して k-サイクルの存在と chorded k-サイクルの存在が同値であると言っている。すなわちこの定理はサイクルの位数に関する情報と弦が存在するか否かの情報を完全に分離している。これは多くの研究者が抱いていた感覚を覆す結果であり、大きな知見となった。

以上のように本研究は当初の目的について大きな成果を得ることができた。

参考文献

[1] R.E.L. Aldred and M.D. Plummer, Distance-restricted matching extension in planar triangulations, Australas. J. Combin. **29** (2004) 215 – 224.

[2] I. Anderson, Perfect matchings in graphs, J. Combin. Theory Ser. B **10** (1971) 183 – 186

[3] J.A. Bondy, Pancyclic graphs I, J. Combin. Theory Ser. B **11** (1971) 80–84.

[4] H. Broersma, V. Patel and A. Pyatkin, On toughness and Hamiltonicity of $2K_2$-free graphs, J. Graph Theory **75** (2014) 244–255.

[5] V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuits, Discrete Math. **5** (1973) 215–228.

[6] M. Cream, R.J. Gould and K. Hirohata, A note on extending Bondy’s meta-conjecture, Australas. J. Combin. **67** (2017) 463–469.

[7] R.J. Faudree and R.J. Gould, Characterizing forbidden pairs for Hamiltonian prop-erties, Discrete Math. **173** (1997) 45–60.

[8] M.C. Li, D.G. Corneil and E. Mendelsohn, Pancyclicity and NP-completeness in planar graphs, Discrete Applied Math. **98** (2000) 219–225.

[9] M.D. Plummer, Toughness and matching extension in graphs, Discrete Math. **72** (1988) 311 – 320.

[10] M.D. Plummer, A theorem on matchings in the plane, Ann. Discrete Math. **41** (1989) 347 – 354.

[11] M. Porteous and R.E.L. Aldred, Matching extensions with prescribed and forbidden edges, Austalas. J. Combin.**13** (1996) 163 – 174.

[12] D.R. Woodall, The bidnig number of a graph and its Anderson number, J. Combin. Theory Ser. B **15** (1973) 225 – 255.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　5件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 M.D. Plummer and A. Saito	４．巻 340
２．論文標題 Toughness, binding number and restricted matching extension in graphs	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Discrete Mathematics	６．最初と最後の頁 2665-2672
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2016.10.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito	４．巻 340
２．論文標題 Edge proximity and matching extension in punctured planar triangulations	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Discrete Mathematics	６．最初と最後の頁 2978-2985
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2017.07.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 G. Chen, M.N. Ellingham, A. Saito and S. Shan	４．巻 33
２．論文標題 Spanning trails with maximum degree at most 4 in 2K2-free graphs	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Graphs and Combinatorics	６．最初と最後の頁 1095-1101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-017-1823-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 G. Chen, R. Gould, X.Gu and A. Saito	４．巻 341
２．論文標題 Cycles with a chord in dense graphs	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Discrete Mathematics	６．最初と最後の頁 2131-2141
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2018.04.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito	4．巻 90
2．論文標題 Pairs and triples of forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Graph Theory	6．最初と最後の頁 61-82
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi:10.1002/jgt.22368	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　4件／うち国際学会　7件）

1．発表者名 A. Saito
2．発表標題 Cycles with a chord in graphs
3．学会等名 31st Midwest Conference on Combinatorics and Combinatorial Computing（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 A. Saito
2．発表標題 Hamiltonian bipartite graphs in dense graphs
3．学会等名 International Conference on Graphs, Artificial Intelligence and Complex Networks（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 A. Saito
2．発表標題 Hamiltonian bipartite graphs in dense graphs
3．学会等名 8th Cracow Conference on Graph theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 A. Saito
2．発表標題 Spanning bipartite graphs with high degree sum in graphs
3．学会等名 6th Pacific Workshop on Discrete Mathematics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 斎藤 明
2．発表標題 Distance matching extension of star-free graphs
3．学会等名 日本数学会平成31年度年会
4．発表年 2019年

1．発表者名 A. Saito
2．発表標題 Distance matching extension in star-free graphs
3．学会等名 27th. British Combinatorial Conference（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 A. Saito
2．発表標題 Spanning bipartite subgraphs in graphs with large degree sum
3．学会等名 The Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名 斎藤 明
２．発表標題 Chorded cycles in dense graphs
３．学会等名 日本数学会令和元年度秋季総合分科会
４．発表年 2019年

１．発表者名 A. Saito
２．発表標題 Implications in rainbow forbidden subgraphs
３．学会等名 42nd. Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Top Downloaded Paper 2017-2018, Journal of Graph Theory (R.E.L.~Aldred, J. Fujisawa and A. Saito, Pairs and triples of forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor, J. Graph Theory, 90 (2019) 61-82)

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考