

令和 3 年 6 月 30 日現在

機関番号：32639

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K01249

研究課題名（和文）情報統計力学を用いたポートフォリオ最適化に内包された主双対構造とマクロ理論の解明

研究課題名（英文）Statistical Mechanical Informatics for Primal-Dual Structure and Macroscopic Theory Included in Portfolio Optimization Problem

研究代表者

新里 隆 (SHINZATO, Takashi)

玉川大学・工学部・助教

研究者番号：70574614

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：近年、ポートフォリオ最適化問題のある種の問題に対して、その困難を克服することができる情報統計力学を用いて解明する研究が行われているが、複数制約が課されたポートフォリオ最適化問題に内包された主双対構造やそれぞれの最適解の数理構造、そしてマクロ変数間の関係式について議論している研究が十分に行われていなかった。そこで本研究を通して、情報統計力学を用いて、投資リスク最小化問題（主問題）と期待収益最大化問題（双対問題）を比較し、それらの主双対構造やマクロ理論を解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ポートフォリオ最適化問題に対する情報統計力学の研究はこれまでもいくつか行われているが、投資システムを主双対構造の観点から正しく議論することにより、そこで得られた成果は実際の投資行動の最適な指針になる（投資家の期待に応える知見を提供できる）と予想される。さらに本研究により、情報統計力学を通してポートフォリオ最適化問題を他分野と関連付けることで、有機的で学際領域的な研究分野に発展することができた。

研究成果の概要（英文）：In recent years, research has been conducted to elucidate portfolio optimization problems using statistical mechanical informatics that can overcome these difficulties, except but for portfolio optimization problems with multiple constraints. Not enough research has discussed the primal-dual structure, the mathematical structure of each optimal solution, and the relational expression between macro variables. Therefore, through this research, we compare the investment risk minimization problem (primal problem) and the expected return maximization problem (dual problem) using statistical mechanical informatics, and disclose their primal-dual structure and macroscopic theory.

研究分野：情報統計力学

キーワード：情報統計力学 ポートフォリオ最適化 金融工学 レプリカ解析 確率伝搬法

1. 研究開始当初の背景

投資家が選好する資産運用の最適な指針を提供することが期待される分散投資理論であるポートフォリオ最適化問題は、1952年に Markowitz により初めて提案された。現在でもポートフォリオ最適化問題に関して様々な研究が行われているが、その中でも近年、ポートフォリオ最適化問題のある種の問題はオペレーションズリサーチの解析手順では解析が困難である。その困難を克服することができる情報統計力学の解析手法(レプリカ解析、確率伝搬法、ランダム行列理論など)を用いて解明する研究が活発に行われている。

先行研究として、Ciliberti らはレプリカ解析を用いて絶対偏差モデルや期待ショートフォールモデルの最小投資リスクを解析した[1]。Pafka らはランダム行列理論を用いて収益率の分散共分散行列からノイズを除去し、さらに Marchenko-Pastur 則を用いて集中投資度を解析し、予測値と実際の値を比較した[2]。これらの先行研究を踏まえて、研究代表者はこれまで以下の課題について取り組んでいる。

- (1) 予算制約付きリスク最小化問題の最適解を求めるために必要な計算量は、(逆行列を求めるため)銘柄数の 3 乗に比例することが知られているが、我々は情報統計力学で開発された解析手法(確率伝搬法)を用いて、最適解の求解アルゴリズムを導出した。このアルゴリズムの計算量は銘柄数の 2 乗に比例しており、既存手法よりも実行的であることが示された。
- (2) レプリカ解析と確率伝搬法を用いて、予算制約と空売り規制が設けられたリスク最小化問題の最適解の投資リスクと集中投資度を解析し、空売り規制の影響を定量的に評価した。
- (3) 各銘柄の分散値が異なる予算制約付きリスク最小化問題の最適解の投資リスクと集中投資度をレプリカ解析とランダム行列理論を用いて議論し、最小投資リスクと集中投資度の、銘柄の分散値の依存性について解析的に評価した(またこれは学会賞に選ばれた)[4,5]。
- (4) 銘柄間の収益率相関を考慮した予算制約と線形不等式制約付きリスク最小化問題の最適解を求め、その最適解の投資リスクと集中投資度をレプリカ解析と確率伝搬法を用いて評価した。さらに収益率相関行列の固有値分布の影響を定量的に評価した。
- (5) 予算制約と集中投資度制約が課された投資リスク最小化問題[3]と予算制約と投資リスク制約が課された集中投資度最大化問題[6]のそれぞれをレプリカ解析を用いて議論した。投資リスク最小化問題[3]を主問題とし、集中投資度最大化問題[6]を双対問題と見なすことで、両者の主双対関係からそれぞれの最適解の数理構造を明らかにした。

先行研究を受け、Varga-Haszonits らはレプリカ解析を用いて、予算制約と期待収益制約が課されたポートフォリオ最適化問題を議論しているが、その最適化問題の目的関数は投資リスクではなく、各期の総収益と期待収益の「差の分散」を目的関数として用いており、研究業績 5 で議論された予算制約のみが課された最小投資リスク問題の自然な拡張である、予算制約と期待収益制約が課された最小投資リスク問題を直接解いているとは言えない[7]。

そこで本研究に先駆けて、予算制約と期待収益制約が課された最小投資リスク問題を解析し、自己平均性の仮定の下で 1 銘柄当たりの最小投資リスクを評価することができた[8]。これらを受け、[3,6,8]の成果をさらに発展させ、最適な資産運用を実現するためには、複数制約が課されたポートフォリオ最適化問題(従来のオペレーションズリサーチ手法では解析できない)において、情報統計力学の解析手法を用いて、ポートフォリオ最適化問題の主双対構造やそれぞれの最適解の数理構造、そしてマクロ変数間の関係式を明らかにする必要があるだろうと考えた。

2. 研究の目的

近年、資産運用を行う投資家が知見提供を期待するポートフォリオ最適化問題のある種の問題(この問題はオペレーションズリサーチの解析手順では解析が困難であることが知られている)に対して、その困難を克服することができる情報統計力学を用いて解明する研究が行われているが、複数制約が課されたポートフォリオ最適化問題に内包された主双対構造やそれぞれの最適解の数理構造、そしてマクロ変数間の関係式(やその関係式から展開されるマクロ理論)について議論している研究が十分に行われているとは言えない。そこで本申請研究では、情報統計力学を用いて、投資リスク最小化問題(主問題)と期待収益最大化問題(双対問題)を比較し、それら

の主双対構造やマクロ理論を解明する。

3. 研究の方法

具体的には以下の2点を明らかにする。

- (1) 主双対構造の探求[3,6,8]で議論した主双対構造は、ある限定的な投資状況(議論の第1段階として、平均分散モデルを用い、各銘柄の収益率が統計的に独立を仮定する)を想定して行ってきたが、より一般の状況(例えば、相関ありの場合)においても成り立つかどうかを調べる必要があるだろう。さらに主問題と双対問題の最適解やその数値構造を明らかにすることで、ポートフォリオ最適化問題の理解を深め、投資家が期待する知見を提供するだろう。
- (2) マクロ理論の構築これまでの研究代表者の若手研究(B)で行った研究により、シャープ比が満たすピタゴラス定理を導出し、その数値構造を議論してきたが、この研究の帰結として、ポートフォリオ最適化問題においても、統計力学の枠組みで議論されているマクロな変数間の関係式(物理学では熱力学的関係式と呼ぶ)を確認することができ、主双対構造からも同様にマクロな関係式をいくつか導けることができるだろう。

4. 研究成果

(1) 2017年度

3件の学術論文が出版された。ランダム行列理論を用いて集中投資度制約付き投資リスク最小化問題の主双対定理を解析した。またレプリカ解析を用いて集中投資度と予算制約が課された投資リスク最小化問題を解析し、さらにシングルファクターモデルに従う収益率に対する最小投資リスクを評価した。

(2) 2018年度

4件の学術論文が出版された。1本目はレプリカ解析を用いて、ポートフォリオ最適化問題の主双対問題のマクロ理論について議論した。2本目はレプリカ解析とLagrange未定乗数法を用いて集中投資度の上下限について調査した。3本目は本研究の解析手法の根幹をなすレプリカトリックの数学的厳密性について議論した。最後にレプリカ解析を用いてコスト付き投資リスクの最小化問題を解析した。これらの研究により、最適解が満たすマクロな変数間の関係式を導出することに成功した。

(3) 2019年度

無リスク資産を含む投資リスク最小化問題と2資産分離定理について議論し、さらに期待収益を最大化するポートフォリオと期待収益を最小化するポートフォリオの関係性を議論し、以下のことが示された。

無リスク資産を含むポートフォリオ最適化問題の最適解(a)と無リスク資産を含まないポートフォリオ最適化問題の最適解を接点ポートフォリオと見なして、無リスク資産と接点ポートフォリオの2資産で構成した最適解(b)と比較し、クエンチ系において両者(最適解(a)と最適解(b))が一致することが示された。またアニール系で得られた2資産分離定理に対応したクエンチ系の2資産分離定理を導出し、その定理の幾何学的な解釈を与えることができた。

投資リスク制約付き期待収益最大化問題と最小化問題(期待収益の範囲を明確にするために)を解き、最大化問題の最適解(a)と最小化問題の最適解(b)の比較を行った。レプリカ解析とラグランジュ未定乗数法を用いて、どの最適解も2つのベクトル(投資リスクの大きさによらない定ベクトルと投資リスクの大きさに依存したベクトル)の線型和で構成されていることを示した。さらに最適解同士のオーバーラップを解析し、両者の幾何学的な関係を示すことができた。

(4) 2020年度

安全資産を含む投資市場におけるポートフォリオ最適化問題に対して、最適投資ポートフォリオの性質を議論してきた。特に(A)安全資産を含まない投資対象における最適化と最適ポートフォリオと、(B)安全資産を含む投資対象における最適化と最適ポートフォリオの両方を比較し、以下の性質を示すことができた。

(A)と(B)において投資比率が一致する、つまり、任意の銘柄 i, j において、銘柄 i の投資比率 w_i と銘柄 j の投資比率 w_j の比、 $w_i(A)/w_j(A)=w_i(B)/w_j(B)$ が成り立つことを示した。さらに投資市場を仮想的に作成し、数値実験を用いてこの性質を確認した。予算制約や期待収益制約以外にも複数の制約条件を加味した最小投資リスク問題について、(A)レプリカ解析、(B)確率伝搬法、(C)ラグランジュ未定乗数法の3つの解析手法を用いて最適解の数理的な性質を調べた。さらに(B)に基づいて導出された求解アルゴリズムを開発し、(A)や(C)の結果と比較した。

<引用文献>

- [1]S.Ciliberti, M.M´ezard, Euro.Phys.J.B, 27, 175, (2007).
- [2]S.Pafka, I.Kondor, PhysicaA, 319, 487, (2003).
- [3]T.Shinzato, preprint dohttps://arxiv.org/abs/1605.06845, (2016).
- [4]T.Shinzato, preprint dohttps://arxiv.org/abs/1605.06843, (2016).
- [5]T.Shinzato, preprint dohttps://arxiv.org/abs/1605.06840, (2016).
- [6]T.Shinzato, preprint dohttps://arxiv.org/abs/1608.04522, (2016).
- [7]I.Varga-Haszonits, et al., preprint dohttps://arxiv.org/abs/1606.08679, (2016).
- [8]T.Shinzato, preprint dohttps://arxiv.org/abs/1609.05475, (2016).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 88
2. 論文標題 Minimal Investment Risk with Cost and Return Constraints: A Replica Analysis	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 064804 ~ 064810
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.88.064804	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 2018
2. 論文標題 Macroscopic relationship in primal-dual portfolio optimization problem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment	6. 最初と最後の頁 23401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-5468/aa9f40	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 490
2. 論文標題 Maximizing and minimizing investment concentration with constraints of budget and investment risk	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Physica A: Statistical Mechanics and its Applications	6. 最初と最後の頁 986 ~ 993
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physa.2017.08.088	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 2018
2. 論文標題 Validation of the replica trick for simple models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment	6. 最初と最後の頁 43306
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-5468/aab686	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 87
2. 論文標題 Replica Approach for Minimal Investment Risk with Cost	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 64801
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.87.064801	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Liang Shuyu, 麓敦子, 梶原康博, 田淵雄也, 新里隆	4. 巻 30
2. 論文標題 UHF 帯 RFID による屋内位置推定方法	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 設備管理学会論文誌	6. 最初と最後の頁 9~18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yating Yu, 梶原康博, 新里隆, 林之久	4. 巻 69
2. 論文標題 従業員の職務満足と継続就業意思の経年変化とその因果関係に関する研究	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本経営工学会論文誌	6. 最初と最後の頁 33~45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11221/jima.69.33	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 86
2. 論文標題 Replica Analysis for Portfolio Optimization with Single-Factor Model	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 63802
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.86.063802	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tada Daichi, Yamamoto Hisashi, Shinzato Takashi	4. 巻 86
2. 論文標題 Random Matrix Approach for Primal-Dual Portfolio Optimization Problems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 124804
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.86.124804	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinzato Takashi	4. 巻 490
2. 論文標題 Maximizing and minimizing investment concentration with constraints of budget and investment risk	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Physica A: Statistical Mechanics and its Applications	6. 最初と最後の頁 986 ~ 993
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physa.2017.08.088	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------