

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K03629

研究課題名(和文) ゲーム理論における双対・反双対性の基礎研究と応用

研究課題名(英文) Duality and anti-duality in game theory: theory and applications

研究代表者

穂刈 享 (Hokari, Toru)

慶應義塾大学・経済学部(三田)・教授

研究者番号：20344856

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Oishi et al. (2016, J Math Econ) の双対性・反双対性アプローチでは、従来からある「双対ゲーム」の概念を用いて、協力ゲームの分野における諸結果を関連付け、いくつかの新たな結果を見つけたのだが、本研究では、代替的な双対ゲームの概念で、従来のものと同様の効果をもち、新たな結果を生み出し得るものについて検討し、3人ゲームについてはそのような代替的な双対ゲームのクラスを全て求めることができ、一般的な n 人ゲームについては1つの例を示すことができた。また、それと並行して、協力ゲームの公理的分析の分野におけるいくつかの未解決問題を解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

協力ゲームの分野では、複数の個人が集まって協力することによって得られる成果をどのように分けるか、という問題を数学的に考察している。ある問題と別の問題をうまく関連づけることによって、一方の問題をどう解決するかということが他方の問題の解決に役に立つかもしれない。あるゲームの「双対ゲーム」を考えるということは、そのような関連付けの一例であり、代替的な双対ゲームの概念について考察する本研究は、このような文脈における「新たな関連付の仕方」を提供しているといえることができる。

研究成果の概要(英文)：In the duality/anti-duality approach of Oishi et al. (2016, J Math Econ), by using the standard notion of "dual games", some hidden relations among allocation rules, axioms, and axiomatization results are discovered. We were interested in finding other alternative notions of dual games, that might have a similar impact on the field of axiomatic analysis of cooperative games as the standard one. We were able to characterize all such alternative notions of dual game in the three-person case, and provide an example in the general n person case. We have also solved some open problems in this field.

研究分野：ゲーム理論(協力ゲーム)

キーワード：協力ゲーム 双対ゲーム 双対性 公理的分析

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

協力ゲームの分野では、いくつかの公理を満たす配分ルールが存在するのか、存在するとすればそれは単数か複数かという問題を取り扱う。この分野における主要な結果は、いわゆる「公理化 (axiomatization)」という形で表される。シャープレイ値やコアなどのよく知られた配分ルールについては、複数の公理化が存在している。Oishi et al. (2016, J Math Econ)は「双対ゲーム」の概念を使って、任意の配分ルールの(反)双対ルールを定義し、任意の公理の(反)双対公理を定義することにより、すでに存在していたいくつかの公理化が実質的に同じものであることを示したり、新たな公理化を導出した。

また、この分野では重要な未解決問題がいくつかあることが知られていた (穂刈・内田, 2004)。

2. 研究の目的

Oishi et al. (2016, J Math Econ)では、標準的な「双対ゲーム」の概念を用いて、配分ルールと配分ルールの間の(反)双対関係、公理と公理の間の(反)双対関係について分析したのであるが、本研究では、同様の分析が可能となるような代替的な「双対ゲーム」の概念が存在するのかということについて考察した。

また、それと並行して、穂刈・内田 (2004)で示された未解決問題についても取り組んだ。

3. 研究の方法

標準的な「双対ゲーム」を、ゲームの集合上での写像と見做し、標準的な「双対ゲーム」に対応する写像が持つ3つの性質に注目し、ゲームの集合上の写像で、その3つの性質を持つものは他にもあるのかという数学的な問題を考えた。一般的な n 人ゲームでは、この問題は難しすぎるということが判明したため、まずは3人ゲームについて考察した。

4. 研究成果

所与の TU ゲームの「双対ゲーム」の標準的な定義においては、各提携が得られる総利得は、全体提携で得られる総利得からその提携の補集合で得られる総利得を引いたものとされている。任意の TU ゲームをその双対ゲームに写す写像は、TU ゲームの集合上の一次変換と見做すことができる。この一次変換は以下の性質を持っていることがよく知られている。

- (1)この一次変換を2回適用すると元のゲームに戻る。
- (2)この一次変換によってシャープレイ値は不変である。

(2)の意味において、任意の TU ゲームとその双対ゲームは、シャープレイ値の観点から見れば、同一の状況を描写する2つの異なる方法であると言える。本研究においては、TU ゲームの集合上の一次変換で上の2つの性質および「無名性」(変換の仕方がプレイヤーの名前に依存しないという性質)を満たすものが双対ゲームの標準的な定義から得られる上記の一次変換以外に存在するのかどうか、存在するならばそのような一次変換を全て記述することはできるのかという問題を考察し、以下の結果を得た。

1. プレイヤーの3人の場合の TU ゲームについては、上記の3つの条件を満たす全ての一次変換を求めることができた。プレイヤーが3人の場合には、TU ゲームの集合上の一次変換で「無名性」を満たすものは全部で10個の変数を用いて表すことができる。上記の(1)の条件から、10本の式が得られ、(2)の条件から2本の式が得られるので、10個の変数に対して12本の式が与えられることになる。結果的に21個の場合分けを行うことにより、21個の行列を用いてこの連立方程式の解を全て記述することができた。

2. 3人ゲームについて求めた一次変換の中で n 人のケースに一般化できるものを1つ見つけることができた。

また、Oishi(2018, Meisei Univ.DP)において、既存の(反)双対アプローチが経済問題の配分ルールの規範的分析にどの程度応用できるのかを調べた。例えば、既存の反双対アプローチを応用することで、談合問題の仁ルールの公理化は、Hwang and Yeh (2012, Soc Choice Welfare)に示された飛行場問題の仁ルールの公理化と自己反双対になるにも関わらず、談合問題の整合性公理は飛行場問題の整合性公理と異なる定式化になることが明らかにされた。この定式化により、談合問題の整合性公理は、当該の談合問題の文脈で自然な解釈を与えることができる。この意味で反双対アプローチは経済問題の配分ルールの公理的研究にも有益であると言える。

配分ルールについての双対・反双対アプローチの基本的諸性質を使うと、配分ルールの公理化は、その自己(反)双対ルールの公理化で用いられている公理の(反)双対をとることで導出することができる。この例証として、飛行場ゲームのシャープレイ値の公理化で用いられている公理の双対をとることで、談合ゲームのシャープレイ値の新しい公理化を導くことができる。この公理化のなかに使用されている公理の1つは、飛行場ゲームのある整合性公理の双対公理であり、文献では知られていない。ほかの例証として、飛行場ゲームの仁の公理化で用いられている公理の反双対をとることで、談合ゲームの仁の新しい公理化を導くことができる。この公理化のなかに使用されている公理の1つは、飛行場ゲームの別の整合性公理の反双対公理であ

り、文献では知られていない。

協力ゲームの枠組みで、共同のプロジェクトへの参加者の集合が変化する状況を考え、参加者の集合が大きくなるほど各人が得をするような余剰の配分方法 (population monotonic allocation scheme, PMAS) が存在する条件についても研究を進めた。プレイヤーの数が4以下の準凸ゲームにおいては PMAS が存在することは知られていたものの、その具体的な計算方法が知られていなかったので、任意の4人準凸ゲームの PMAS を計算するためのアルゴリズムを作り、それがうまく機能することを示した。準凸ゲームにおける PMAS についての研究は、中国で開催された国際学会で報告した。

コアの公理化としては、Peleg (1986, *Int J Game Theory*) と Tadenuma (1992, *Int J Game Theory*) がよく知られているが、配分ルールの変域を凸ゲームの集合に制限した場合に、これら2つの定理と同様のコアの公理化が得られるかどうかは未解決問題であった。Hokari, Funaki, Sudholter (2020) はこの問題を部分的に解決した。より具体的には、

1. 凸ゲームの集合を定義域とする配分ルールで、Peleg の4つの公理と「無名性」を満たすものはコアとその「相対的内点」(relative interior) の2つだけであること
2. 凸ゲームの集合を定義域とする配分ルールで、Tadenuma の3つの公理と「無名性」を満たすものはコア以外にも存在することを示した。

<引用文献>

- (1) T. Oishi, M. Nakayama, T. Hokari, Y. Funaki. Duality and anti-duality in TU games applied to solutions, axioms, and axiomatizations. *Journal of Mathematical Economics*, 63:45-53, 2016.
- (2) 穂刈 享, 内田誠吾. 凸ゲームと準凸ゲームに関する未解決問題について. *京都大学数理解析研究所講究録*, 1371:116-124, 2004.
- (3) K. Tadenuma. Reduced games, consistency, and the core. *International Journal of Game Theory*, 20:325-334, 1992.
- (4) B. Peleg. On the reduced game property and its converse. *International Journal of Game Theory*, 15:187-200, 1986.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takayuki Oishi	4. 巻 38
2. 論文標題 Duality and anti-duality for allocation rules in economic problems I: an axiomatic analysis	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Graduate School and School of Economics, Meisei University, Discussion Paper Series	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toru Hokari, Yukihiko Funaki, Peter Sudolter	4. 巻 -
2. 論文標題 Consistency, anonymity, and the core on the domain of convex games	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Review of Economic Design	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10058-020-00231-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 0件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 大石尊之
2. 発表標題 Duality and anti-duality in economic allocation problems applied to rules, axioms, and axiomatizations: cooperative game theoretic approach
3. 学会等名 42nd Annual Meeting of the Association for Mathematics Applied to Social and Economic Sciences (AMASES) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 穂刈 享
2. 発表標題 On the existence of population-monotonic allocation schemes in quasi-convex games
3. 学会等名 The Third East Asia Game Theory International Conference (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Hokari
2. 発表標題 Alternative definitions of duals of TU games
3. 学会等名 East Asian Game Theory Conference 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 穂刈 享
2. 発表標題 Alternative definitions of duals of TU games
3. 学会等名 Game Theory Workshop in Honor of Professor Mikio Nakayama
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大石尊之
2. 発表標題 Anti-Duality in Cooperative Game Theory and its Application to Socio-Economic Problems
3. 学会等名 Game Theory Workshop in Honor of Professor Mikio Nakayama
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takayuki Oishi
2. 発表標題 A general derivation of axiomatizations for allocation rules: duality and anti-duality approach
3. 学会等名 The 15th European Meeting on Game Theory (SING15) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	大石 尊之 (Oishi Takayuki) (50439220)	明星大学・経済学部・准教授 (32685)	