

令和 3 年 5 月 31 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K03653

研究課題名（和文）レジーム・スイッチングモデルの統計的推測理論の開発

研究課題名（英文）Estimation and inference in Markov regime switching models

研究代表者

下津 克己（Shimotsu, Katsumi）

東京大学・大学院経済学研究科（経済学部）・教授

研究者番号：50547510

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：レジーム・スイッチングモデルは、構造変化・非線形性などの時系列の特徴をよく記述することができるため、経済学・ファイナンスの分野において非常に幅広く利用されている。レジーム・スイッチングモデルの実際応用においては、レジームの数をデータから決定することが特に重要となるが、レジームの数に関する統計的推測の実用的な手法は未だに確立されていなかった。本研究は、レジームの数をデータから決定する実用的な手法として尤度比検定を提唱し、尤度比検定統計量の漸近分布を導出した。さらに、コンピューター・シミュレーションを行い、尤度比検定が実用性を持つことを確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

レジーム・スイッチングモデルは、構造変化・非線形性などの時系列の特徴をよく記述することができるため、経済学・ファイナンスの分野において非常に幅広く利用されている。レジーム・スイッチングモデルの実証研究における応用において、レジームの数は重要なパラメーターであり、レジームの数自体が経済学的に重要な意味を持つことも多い。しかしながら、経済学理論は、レジームの数を選択するためのガイダンスをほとんど提供しないため、実証研究者が利用可能な統計的手段は少なかった。そのため、レジームの数の統計的検定手順を確立した本研究の成果は学術的・社会的に重要な意味を持つ。

研究成果の概要（英文）：Markov regime switching models have been used in numerous empirical applications in economics and finance because it can capture many important features in time series such as structural changes, nonlinearity, and asymmetric dependence. Despite its importance, the asymptotic properties of the MLE and related procedures have not been well understood. In particular, the asymptotic distribution of the likelihood ratio test (LRT) statistic for testing the number of regimes is still unknown. The number of regimes is an important parameter in applications of Markov regime switching models. Furthermore, in many applications, the number of regimes itself is of economic interest. Therefore, it is important to establish a statistical testing procedure for the number of regimes. This research derives the asymptotic distribution of the LRT statistic for testing the number of regimes and conducts simulation studies to confirm that the LRT statistic has good finite sample properties.

研究分野：計量経済学

キーワード：レジーム・スイッチングモデル 尤度比検定

1. 研究開始当初の背景

Hamilton (1989)の重要な貢献以来、レジーム・スイッチングモデルは、時系列の構造変化・非線形性・非対称性などの多くの重要な特徴を捉えることができるため、経済学や金融における多くの実証研究において使用されてきた。

その重要性にもかかわらず、レジーム・スイッチングモデルの最尤推定量および関連する統計量の漸近的な特性はよく理解されていなかった。1番目に、最尤推定量の漸近分布は限られたモデルについてのみ導出されていた。Douc et al. (2004)は、各々のレジームで観測される変数の分布が現在のレジームにのみ依存し、レジームの遷移確率行列がゼロを含まないケースにおける最尤推定量の漸近分布を導出した。しかしながら、Hamilton (1989)のモデルでは、各々のレジームで観測される変数の分布は、現在のレジームと q 期前のレジームの両方に依存するため、Douc et al. (2004)の結果は Hamilton (1989)のモデルを含んでいない。驚くことに、最も有名なレジーム・スイッチングモデルの最尤推定量の漸近分布は、いまだに未解決問題であった。この結果、実証研究で日常的に利用されている、 t 検定や Wald 検定の正当性は、確立されていなかった。

2番目に、レジームの数を検定するための尤度比検定統計量の漸近分布はいまだに知られていなかった。レジームの数は、レジーム・スイッチングモデルの実証研究における応用において、重要なパラメータであり、レジームの数自体が経済学的に重要な意味を持つことも多い。しかしながら、経済学理論は、レジームの数を選択するためのガイダンスをほとんど提供しないため、実証研究者が利用可能な統計的手段は少なかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、(1)各々のレジームで観測される変数の分布が現在のレジームと q 期前のレジームの両方に依存する一般的なレジーム・スイッチングモデルの最尤推定量の漸近分布を導出すること、(2)レジームの数が M 個であるという帰無仮説をレジームの数が $M+1$ 個であるという対立仮説に対して検定する尤度比検定統計量の漸近分布を導出すること、である。

3. 研究の方法

一般的なレジーム・スイッチングモデルの最尤推定量の漸近分布の導出においては、Douc et al. (2004)の分析の手法を拡張した。Douc et al. (2004)は、観測データに条件づけた下で、時刻 t の(観測されない)レジームの分布と時刻 $t-k$ のレジームの分布の間の統計的従属性が幾何学的に減衰することを証明した。続いて、Douc et al. (2004)は、レジームの遷移確率行列がゼロを含まない場合、このレジームの分布の統計的従属性の減衰は、時刻 t に観測される変数の分布と時刻 $t-k$ に観測される変数の分布の間の統計的従属性の減衰へと変換されることを示した。

本研究は、以下の重要な洞察に基づいている。各々のレジームで観測される変数の分布が現在のレジームと q 期前のレジームの両方に依存する場合には、時刻 t に観測される変数の分布と時刻 $t-k$ に観測される変数の分布との間の統計的従属性は、時刻 t から時刻 $t-q$ までのレジームの集合の分布と、時刻 $t-k$ から時刻 $t-q-k$ までのレジームの集合の分布に依存する。したがって、これらのレジームの集合の分布の間の統計的従属性が幾何学的に減衰することを証明すれば、時刻 t と時刻 $t-k$ に観測される変数の分布の間の統計的従属性の減衰を証明できる。

本研究は、coupling method (Rosenthal, 1995)を使用して、このレジームの集合の分布の間の統計的従属性が幾何学的に減衰することを証明した。さらに、この結果と Douc et al. (2004)の手法を統合して、最尤推定量の漸近分布を導出した。

レジームの数に関する尤度比検定統計量の漸近分布の導出においては、帰無仮説の下で一部のパラメータが識別されない問題が発生する。このため、本研究は、最初に LaCam の differentiable-in-quadratic-mean expansion (DQM 展開)をレジーム・スイッチングモデルに利用できるように拡張した。DQM 展開は、対数尤度関数をヘッシアンまで展開する古典的なテイラー展開よりも単純なアプローチを可能にするため、帰無仮説の下で一部のパラメータが識別されず、さらに対数尤度関数が複雑な形状をとるレジーム・スイッチングモデルの分析において有用である。本研究が導出した DQM 展開は、対数尤度関数が、尤度比の(高次)導関数と、パラメータの多項式の二次関数で局所的に近似されることを示した。

各々のレジームで観察される変数の分布が正規分布でない場合は、対数尤度関数は、上述の DQM 展開を用いて対数尤度関数の 2 次展開を行いスコアを求めることにより、パラメータの多項式の 2 次関数によって近似できる。しかし、各々のレジームで観察される変数の分布が正規分布である場合は、対数尤度関数の展開の次数がレジームの系列相関に依存して変化するため、高度な分析が必要となる。特に、レジームの系列相関が無い場合には、モデルは有限混合正規モデ

ルに還元される。Kasahara and Shimotsu (2015)は、有限混合正規モデルにおいては、対数尤度関数の(2次ではなく)4次展開がスコアを導出するために必要となることを示した。本研究は、Kasahara and Shimotsu (2015)の知見に基づき、対数尤度関数の展開の次数がパラメータの値に依存して変化する場合にも適用可能な対数尤度関数の近似手法を確立して、正規分布レジーム・スイッチングモデルの対数尤度関数の漸近分析手法を確立した。この結果を用いて、レジームの数をデータから決定する実用的な手法として尤度比検定を提唱し、尤度比検定統計量の漸近分布を導出した。

4. 研究成果

本研究は、以下の2つの主要な研究成果をあげた。4-1. 一般的なレジーム・スイッチングモデルのパラメータの最尤推定量の漸近分布の導出。4-2. レジームの数を検定する尤度比検定統計量の漸近分布の導出。

4-1. 一般的なレジーム・スイッチングモデルのパラメータの最尤推定量の漸近分布の導出

本研究は、各々のレジームで観測される変数の分布が現在のレジームと q 期前のレジームの両方に依存する、一般的なレジーム・スイッチングモデルのパラメータの最尤推定量の漸近分布を導出した。さらに、フィッシャー情報行列の一致性を導出して、 t 検定や Wald 検定の正当性を確立した。この研究成果は、実証研究においてこれらの検定を用いた仮説検定の正当性が損なわれている現状を解決した。さらに、大規模なコンピューター・シミュレーションを行い、現実的なサンプルサイズの下での最尤推定量の分布が、漸近分布によって良く近似されることを検証した。

4-2. レジームの数を検定する尤度比検定統計量の漸近分布の導出

本研究は、フィッシャー情報行列のランクがパラメータの値によって変化する場合にも適用可能な対数尤度関数の近似手法を確立し、レジーム・スイッチングモデルの対数尤度関数の漸近分析手法を確立した。この結果を用いて、レジームの数をデータから決定する実用的な手法として尤度比検定を提唱し、尤度比検定統計量の漸近分布を導出した。さらに、コンピューター・シミュレーションを行い、現実的なサンプルサイズの下で、尤度比検定が実用性を持つことを確認した。また、現実のデータを用いて、尤度比検定が Akaike Information Criterion や Bayes Information Criterion では明らかにすることのできない知見を提供できることを確認した。

参考文献

Chen, J. (1995), "Optimal Rate of Convergence for Finite Mixture Models," *Annals of Statistics*, 23, 221-233.

Douc, R., Eric Moulines, and Ryden, T. (2004), "Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Autoregressive Models with Markov Regime," *Annals of Statistics*, 32, 2254-2304.

Hamilton, J. (1989), "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 57, 357-384.

Kasahara, H. and Shimotsu, K. (2015), "Testing the Number of Components in Normal Mixture Regression Models," *Journal of the American Statistical Association*, 110, 1632-1645.

Rosenthal, J. S. (1995), "Minorization Conditions and Convergence Rates for Markov Chain Monte Carlo," *Journal of the American Statistical Association*, 90, 558-566.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Hiroyuki Kasahara and Katsumi Shimotsu	4. 巻 -
2. 論文標題 Identification of Regression Models with a Misclassified and Endogenous Binary Regressor	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 arXiv:1904.11143 [econ.EM]	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hiroyuki Kasahara and Katsumi Shimotsu	4. 巻 208
2. 論文標題 Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Regime Switching Econometric Models	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Econometrics	6. 最初と最後の頁 442-467
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jeconom.2018.09.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hiroyuki Kasahara and Katsumi Shimotsu	4. 巻 -
2. 論文標題 Testing the Number of Regimes in Markov Regime Switching Models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 arXiv:1801.06862 [econ.EM]	6. 最初と最後の頁 1-72
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Hiroyuki Kasahara and Katsumi Shimotsu	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Regime Switching Econometric Models	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 CIRJE Discussion Paper F-1049	6. 最初と最後の頁 1-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Katsumi Shimotsu
2. 発表標題 Testing the Number of Regimes in Markov Regime Switching Models
3. 学会等名 28th Annual Meeting of the Midwest Econometric Group (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katsumi Shimotsu
2. 発表標題 Identification of Regression Models with a Misclassified and Endogenous Binary Regressor
3. 学会等名 A Celebration of Peter Phillips' Forty Years at Yale Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katsumi Shimotsu
2. 発表標題 Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Regime Switching Econometric Models
3. 学会等名 Advances in Econometrics Conference, Shanghai Jiao Tong University, China (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Katsumi Shimotsu
2. 発表標題 Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Regime Switching Econometric Models
3. 学会等名 The fourth annual conference of the International Association for Applied Econometrics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Katsumi Shimotsu
2. 発表標題 Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Regime Switching Econometric Models
3. 学会等名 27th Annual Meeting of the Midwest Econometric Group (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関