

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K03654

研究課題名(和文) 高頻度・オプションデータに基づく資産価格・投資理論の研究

研究課題名(英文) Asset pricing and investment theories based on high frequency and option data

研究代表者

中村 信弘 (Nakamura, Nobuhiro)

一橋大学・大学院経営管理研究科・教授

研究者番号：90323899

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：高頻度データから計算される実現分散とオプションデータから計算されるボラティリティ・インデックス(VI, S&Pの場合はVIX)の差で定義される分散リスクプレミアム(VRP)は、将来の原資産のリターンを予測可能であるとする資産価格理論の実証報告がある。本研究では、何故、予測可能性が生まれるのかという問いに対して理論的説明を与えた。様々な確率ボラティリティ(SV)モデルと自己励起型ジャンプをもつ拡張モデルに基づき、VIXの理論計算を行い、ベイズ推定によるモデル推定を行った。更に、VIXとそのボラティリティであるVIXとの階層構造の正の関係を説明できる非アフィン型SVモデルの研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

VRPを用いた原資産の将来リターンの予測において、SVモデルのリターンとボラティリティの相関であるレバレッジ・パラメータの役割が重要であることを理論的に示し、先進国の株式指数、VIXを使った実証分析で実証した。VIXの他に、ボラティリティの期間構造情報をもつVIX先物、VIXオプション、VVIXなどを観測量に加えたベイズ推定を研究した。通常、常微分方程式(ODE)の解で表される特性関数を用いるが、ジャンプ拡散モデルのような場合には、ODEの解析解が得られない。そのような場合でも、ODEの数値解法を組み合わせた新たなベイズ推定法を開発し、実際のデータで推定可能であることを示した。

研究成果の概要(英文)：Asset pricing theories on variance risk premium document that the Variance Risk Premium(VRP) defined by the difference between realized variance calculated from high-frequency data and volatility index(VI, VIX for S&P) calculated from option data has predictability of underlying asset returns. Our research provides theoretical explanation of such predictability. We conduct Bayesian statistical inference of various stochastic volatility(SV) models such as SV model with self-exciting jumps. Moreover, we investigate the positive relationship between hierarchical structure of VIX(model-free implied volatility of S&P500 options) and VVIX(model-free implied volatility of VIX-options), using non-affine SV model.

研究分野：計量ファイナンス

キーワード：確率ボラティリティモデル 分散リスクプレミアム リターン予測可能性 自己・相互励起ジャンプ過程  
バリエーション・スワップ ハミルトニアン・モンテ・カルロ法 非アフィンモデル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

従来の資産価格理論は原資産価格から計算される月次、週次、日次リターンなどの高頻度でないデータに基づいた研究が主流であり、派生証券を利用した研究もそれほど多くなかった。研究開始当初、日中の高頻度データから推計された実現分散 (RV) を利用した既存の日次データに基づく時系列モデルの強化 (GARCH モデルを強化した HEAVY モデル、RV を利用した確率ボラティリティ (SV) モデルなど) や、オプション価格から計算されるモデルフリーインプライドボラティリティ (MFIV) (例えば、VIX (恐怖指数と呼ばれる S&P オプションの MFIV) を利用した資産価格理論の研究が行われ始めており、オプション価格情報から原資産の実確率分布を抽出する Ross のリカバリー定理に関する実証研究も注目されていた。信用リスクのモデル化では、信用事象の発生を地震波のモデル化で 80 年代に研究された自己励起、相互励起過程が応用されていた。

本研究で焦点を当てた資産価格理論のテーマは、分散リスクプレミアムとそれをを用いた資産価格の長期リターンの予測可能性を論じた Bollerlev らの研究(文献 )であった。分散リスクプレミアムは、リスク資産の分散が確率変動することに対して、投資家が要求するリスクプレミアムであり、実現分散と MFIV の差で推計される。何故、このような説明変数が長期リターンを説明できるのか、その要因を探求することで、その研究成果を GPIF 等の公的年金基金の運用や一般の資産運用分野に生かすことができると考えた。

VIX などの MFIV は、確率ボラティリティモデルに基づき、バリエーション・スワップの計算で理論レートを求めることができる。特に、VIX は市場リスクの指標の一つに数えられ、リスクオフの局面では、ジャンプする現象が観察され、それが暫く持続する性質をもつため、自己励起過程を応用したジャンプ・確率ボラティリティモデルによる研究の動機付けとなった。

## 2. 研究の目的

近年、ビッグデータの解析が注目を集めている。金融分野では、高頻度データを用いた時系列分析や原資産から派生した先物・オプションの価格情報を利用した資産価格理論が盛んに研究され始めている。本研究では、日中の高頻度データから計算された実現分散などの実現尺度を従来の月次、週次、日次の低頻度の金融時系列に説明変数、補助変数として新たに追加した強化モデルの研究、満期の異なる期間構造をもつ先物・オプションの価格データを用いた新たな資産価格理論、資産運用の研究を行う。

資産価格理論のテーマのうち、特に、分散リスクプレミアム (VRP) と資産価格の長期リターンの予測可能性を取り上げる。分散リスクプレミアムを理論的に記述するためには、確率ボラティリティ (SV) モデルが必須である。予測対象のリスク資産の SV モデルを開発し、VRP の構成要素である VIX や実現分散を観測データとする SV モデルの統計的推定の方法論の確立が必要である。VIX のプライシングでは、ジャンプのクラスター事象が観察されるため、そのような性質を表現できる SV モデルの開発が望ましい。VIX には満期の異なる先物やオプションが市場で取引されており、それらを観測データとして利用することで、ボラティリティや VRP の期間構造情報を抽出することが可能と考えられる。そのためにはそれらのプライシングモデルと統計的推定方法の研究が必要である。

リターンのリスクプレミアムに加えて、VRP も推定することができると、VIX や、その先物・オプションに適合した原資産のリスク中立確率分布や実確率分布を知ることができる。扱う統計モデルは潜在変数を含むため、最近、開発された Hamiltonian Monte-Carlo 法を適用し、推定を試みる。

VRP による原資産の長期リターンの予測可能性が、様々な資産クラスで観察される現象なのか、そして、どのような状況下で予測力が高まるのか、等々が解明されれば、年金基金等でフォワード・ルッキングな投資やリスク管理に役立つものと期待される。

## 3. 研究の方法

(1) VRP の構成要素である VIX のプライシングを行うために、自己励起型ジャンプをもつ確率ボラティリティ (SVJ) モデルを開発する。ジャンプの強度が定数である単純なジャンプモデルに対して、過去の履歴に依存して時変する強度過程として、Hawkes 過程と呼ばれる自己励起過程が知られている。これらは、過去のジャンプが現在の強度に減衰した形で影響を及ぼすような変動過程で、80 年代始めに地震波の研究に応用された。最近では、高頻度データを用いた市場の微細構造の研究や信用リスクの伝播構造に応用されたりしている。本研究では、ボラティリティのクラスタリング現象等を考慮して、この励起過程に拡散項をもつように拡張した SVJ モデルを使い、VIX の時系列分析、分散変動リスク・プレミアムの推定、局面分析への活用等を考える。原資産、確率分散に共通の自己励起型ジャンプを導入するモデルを基本とし、ジャンプの強度過程が確率分散のレベルに依存するような自己励起・相互励起型ジャンプの可能性を探求する。

(2) VIX を観測データに加えた自己励起型 SVJ モデルの統計的推定を行うために、最近、開発された Hamiltonian Monte-Carlo 法による推定が可能かどうか研究する。VRP によるリターンの予測可能性を調べるにあたって、リターンや分散のリスクの市場価格自体も動的に変動するような可能性も考慮する必要があると考えられる。高頻度データから推計された実現分散の情報に補うことで推定精度を向上させる研究も必要と考えられる。

(3) VIX には限月の異なる VIX 先物や VIX オプションが市場 (CBOE) で取引されている。これらのプライシングモデルを作ることで、これらを観測量とした SV または SVJ モデルの統計的推定が可能となり、推定精度の向上が期待される。VIX 先物や VIX オプションのプライシングでは、確率ボラティリティモデルの標準モデルである Heston モデルと同様に、特性関数法を用いる。Heston モデルでは、逆フーリエ変換を用いるのに対して、より数値的に安定なフーリエ・コサイン法を本研究では採用することにした。ジャンプがある場合には、特性関数の表現を求める際に常微分方程式 (ODE) の求解が必要であるが、解析解が求められないことが多い。そのため、ODE を Runge-Kutta 法で数値的に解きながら、ベイズ推定を行う新たな統計的推論の枠組みを研究する。

(4) VIX には、更に、VIX オプションの MFIV である VVIX が取引所で公表されている。これは S&P500 指数のボラティリティのボラティリティを表す指標である。この VVIX のプライシングを行うにあたって、通常、よく用いられるアファイン型 SV モデルを原資産の S&P500 指数に適用すると、VIX と VVIX の関係性は、逆相関となってしまう、市場で観察される順相関性を理論的に導き出せないという理論的課題が存在する (文献 )。そこで、その問題を克服するために、非アファイン型 SV モデルの採用を考える。原資産 (S&P500)、VIX、VVIX の相互関係をうまく記述できるモデルを構築することができれば、S&P500 オプション、VIX 先物・オプションを同じポートフォリオで管理できるようになり、有益である。VVIX は限月の異なる VIX オプションが取引されているため、期間構造をもっている。そのため、期間構造をもつ VIX、VVIX を観測量とした統計モデルの推定が可能となる。

#### 4. 研究成果

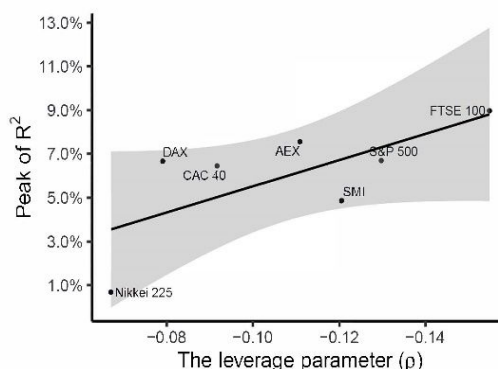
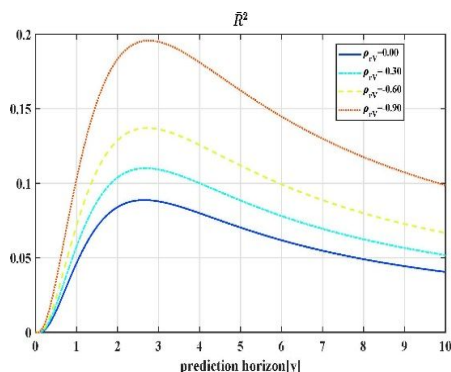
(1) VRP による将来リターンの予測可能性の実証；高頻度データから計算される実現分散 (RV) とオプションから計算されるモデルフリーインプライドボラティリティ (MFIV) である VIX の 2 乗の差として定義される分散リスクプレミアム (VRP) と、それを用いた原資産の将来の累積リターンの予測可能性に関する研究を行った。従来の理論では RV を用いた VRP の定義式が用いられてきたが、本研究では、まず、離散時間の確率ボラティリティ (SV) モデルを用いて、RV を用いない VRP の定義式を考案し、株式指数の他、為替、債券、原油等の様々な代表的資産クラスに対して、累積リターンの予測可能性の実証研究を行い、有効性を確認した。高頻度データが入手不可能な資産クラスに対しては、本研究の成果は有益と考えられる。RV を使う従来の手法では、VIX が 1 か月満期の量であるため、RV の 1 か月予測による調整が必要であったが、その必要性がないという点で優れた方法であると考えられる。次に、リスク中立確率のものでの変動率である VIX のモデル化に関して、連続時間の確率ボラティリティ (SV) モデルを採用したバリエーション・スワップの研究を行った。本モデルの大きな特徴は、確率的に変動するリターンのリスクプレミアムと分散のリスクプレミアムを包含した SV モデルになっている点である。推定には、ハミルトニアン・モンテカルロ法を用いたベイズ推定を行い、推定可能であることを実証した。

更に、2 次拡散過程に相互励起型のジャンプを加えたより一般的な SV モデルに拡張して、VIX の評価式を導出することに成功した。この式に基づき、VRP を計算したところ、将来の累積リターンに対して予測力をもつ説明変数であることを Monte-Carlo シミュレーションで確認できた。

(2) VRP による将来リターンの予測可能性の証明；

CBOE に上場している S&P500 オプションと VIX オプションデータを購入し、リスク資産に大きな影響をもたらす変数の一つである VIX のダイナミクスを研究した。リスク資産の分散の変動に対するリスクプレミアム (VRP) が、資産リターンに対して予測可能性をもつと報告する多くの実証研究があるが、何故、予測可能性が生まれるのかという問いに対して答える研究は殆どない。本研究ではリターン・ダイナミクスに自然な形で織り込まれるリターンの変動に対するリスクプレミアムが分散に比例し、攪乱項の係数である分散 (の平方根) が確率変動すること、確率分散とリターンの攪乱項どうしの負の相関 (レバレッジ効果) が重要な役割を演じていることを見出した。レバレッジ効果の強い資産 (負で絶対値が大きいもの) では、確率分散がリターンの攪乱項を抑制する方向に働くため、将来リターンの予測をより確からしいものとし、その結果、予測可能性が高まると考えられる。確率ボラティリティモデルに基づく、VRP と将来リターンの

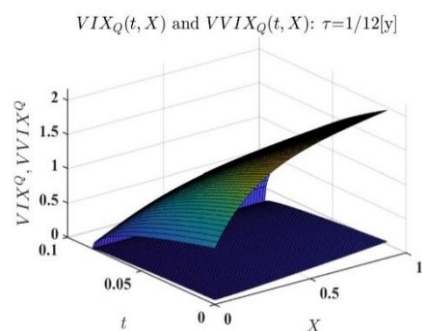
$R^2$  を理論的に計算することができ、実証論文で報告されている予測回帰の  $R^2$  が山型形状になるという理由を理論的に説明することができる。この  $R^2$  のピークもレバレッジ効果と密接に関係していることを明らかにした。左図は、VRP による累積リターンの予測型回帰における予測期間と  $R^2$  の理論的關係を、レバレッジ・パラメータを変えて描いたものである。その絶対値が大きいほど、予測力が高いことがわかる。右図は、Bollerslev らの実証研究(文献 )で取り上げられた先進国の株式指数に対して、同様の期間で 2-ファクター SV モデルで推定を行い、得られたレバレッジ・パラメータと  $R^2$  のピーク的關係をまとめたものである。レバレッジの強い国ほど、予測力が高いことが見て取れる。



(3) VIX リターンの変動過程を、確率ボラティリティモデルや、更に、自己励起型ジャンプを導入したモデルを使い、VIX の他に、ボラティリティの期間構造情報をもつ VIX 先物、VIX オプション、WVIX などを観測量に加えてベイズ推定を行った。その際、特性関数を用いたフーリエ・コサイン法を使いオプション評価を行った。特性関数を効率的に評価するために、常微分方程式 (ODE) の解析解が必要となるが、ジャンプモデルのような場合には、必ずしも ODE の解析解が得られるとは限らない。そのような場合でも、ODE の数値解法を組み合わせることで、ベイズ推定を可能とする方法を開発し、実際のデータで推定可能であることを示した。実証分析によると VIX はリスク資産の変動と密接に関係しており、その変動過程が捉えられることにより、資産価格理論やリスク管理へ応用の可能性が広がると考えられる。自己励起型ジャンプをもつ確率ボラティリティモデルで、VRP を計算し、それを説明変数にもつ予測型回帰で、長期リターンの予測可能性が生じることを理論的に示した。

(4) バリانس・スワップの理論を用いて VIX の理論計算を行った。アフライン型 SV モデルの幾つかの拡張として、自己励起、相互励起的ジャンプをもつ SVJ モデルを開発し、VIX の理論レート の導出を行った。更に、非アフライン型 SV モデルとして、自己励起、相互励起的ジャンプをもつ確率分散の 2 次拡散モデルを研究し、それらを統合するより一般的な枠組みのもとで、バリアン ス・スワップの理論レート (連続過程とジャンプ過程の寄与分の和) を導出した。

(5) VIX と WVIX の正の係数をもつボラティリティの階層構造を形成する VIX、WVIX に対して、それらの正の変動性が市場で観察されている。一方で、通常、SV モデルでよく用いられるアフライン型モデルでは、負の係数が帰結されてしまい、市場と合わないという理論的な問題があった(文献 )。本研究では非アフライン型の 2 次拡散 SV モデルを適用し、正の係数をもつモデルを構築可能であることを示した。実際の S&P500 と VIX の観測データを用いて 2 次拡散 SV モデルのベイズ推定を行い、VIX と WVIX の正の係数性を示すことができた。下図は、状態変数  $X$  の 2 次形式で表される確率分散に対して、 $x$  軸を状態変数  $X$  にとり、 $y$  軸を VIX、WVIX の満期 (1 か月)、 $z$  軸を偏微分方程式 (PDE) の解で表される WVIX を有限差分法で計算した数値としている。順相関性を見るため、解析解をもつ VIX と併せて描いている。WVIX は PDE の数値解であるため、WVIX も観測データにしたベイズ推定は、計算負荷の観点から行えなかった。今後は、PDE の有限差分近似を組み合わせたベイズ推定の実行可能性の研究が必要であろう。



<引用文献>

Bollerslev, T., J. Marrone, L. Xu, and H. Zhou, "Stock Return Predictability and Variance Risk Premia: Statistical Inference and International Evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49(2014), 633-661.

Kaeck, A., "Variance-of-Variance Risk Premium," *Review of Finance*, 22 (2018), 1549-1579.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 野澤 勇樹, 中村 信弘	4. 巻 60
2. 論文標題 確率的依存構造をもつコピュラモデル - 統計的推定方法と計量ファイナンスへの応用 -	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 統計数理	6. 最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Nobuhiro Nakamura	4. 巻 夏季
2. 論文標題 ODE-Based Bayesian Inference of VIX Dynamics Adapted to VIX Futures, VWIXs, and VIX Options	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 51-th JAFEE meeting	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Tomishima and Nobuhiro Nakamura	4. 巻 冬季
2. 論文標題 Variance Risk Premium: Theoretical and Empirical Evidence of Return Predictability	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52-th JAFEE meeting	6. 最初と最後の頁 127-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nobuhiro Nakamura	4. 巻 冬季
2. 論文標題 Return Predictability and Variance Risk Premia in Stochastic Volatility Model with Self-Exciting Jumps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52-th JAFEE meeting	6. 最初と最後の頁 139-150
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 夷藤翔, 中村信弘	4. 巻 17
2. 論文標題 ダイナミック非対称 t コピュラを用いた新興国債市場の相互依存構造に関する研究	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 ジャフィー・ジャーナル	6. 最初と最後の頁 45-66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32212/jafee.17.0_45	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nobuhiro Nakamura	4. 巻 2017:Summer
2. 論文標題 Asset Return Predictability and Dynamics of Variance Risk Premia	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 47-th JAFEE meeting	6. 最初と最後の頁 138-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Sekiguchi and Nobuhiro Nakamura	4. 巻 2017:Winter
2. 論文標題 Term Structure Model of Volatilities and Variance-of-Variance Risk Premium	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 48-th JAFEE meeting	6. 最初と最後の頁 36-47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nobuhiro Nakamura	4. 巻 2017:Winter
2. 論文標題 Asset Return Predictability and Dynamics of Return and Variance Risk Premia	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 48-th JAFEE meeting	6. 最初と最後の頁 24-35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計13件(うち招待講演 0件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 矢田明, 中村信弘
2. 発表標題 Option Pricing Models Driven by Self- and Mutually-Exciting Jump Diffusion Processes
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Nakamura and Kazuhiko Ohashi
2. 発表標題 Non-Affine and Non-Reduced Form Approach to Pricing of VIX and VWIX: Quadratic Diffusion Model
3. 学会等名 日本ファイナンス学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Nakamura and Kazuhiko Ohashi
2. 発表標題 Non-Affine and Non-Reduced Form Approach To Pricing of VIX and VWIX: Quadratic Diffusion Model
3. 学会等名 Asian Finance Association Annual Meeting (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Nakamura
2. 発表標題 ODE-Based Bayesian Inference of VIX Dynamics Adapted to VIX Futures, VWIXs, and VIX Options
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Nobuhiro Nakamura
2. 発表標題 Return Predictability and Variance Risk Premia in Stochastic Volatility Model with Self-Exciting Jumps
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Tomishima and Nobuhiro Nakamura
2. 発表標題 Variance Risk Premium: Theoretical and Empirical Evidence of Return Predictability
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nobuhiro Nakamura and Kazuhiko Ohashi
2. 発表標題 Variance Risk Premium and Predictability of Returns: Quadratic Variance, Self-Exciting Jump Models
3. 学会等名 日本ファイナンス学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中村信弘
2. 発表標題 Asset Return Predictability and Dynamics of Return and Variance Risk Premia
3. 学会等名 日本ファイナンス学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村信弘
2. 発表標題 Non-Affine and Non-Reduced Form Approach to Pricing of VIX and WVIX:Quadratic Diffusion Model
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村信弘
2. 発表標題 Asset Return Predictability and Dynamics of Return and Variance Risk Premia
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 関口雄介, 中村信弘
2. 発表標題 Term Structure Model of Volatilities and Variance-of-Variance Risk Premium
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中村信弘
2. 発表標題 Asset Return Predictability and Dynamics of Variance Risk Premia
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中村信弘
2. 発表標題 The Term Structure of Variance Swap Rates:Self-Exciting Jump Diffusion Modeling
3. 学会等名 日本ファイナンス学会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----