

令和 4 年 6 月 27 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K04764

研究課題名（和文）証明をツールとした数学的探究を促進する累積的な授業のデザイン

研究課題名（英文）Cumulative lesson design for facilitating mathematical inquiry with proof(s) and proving

研究代表者

茅野 公穂（Chino, Kimiho）

信州大学・学術研究院教育学系・教授

研究者番号：20400658

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、中学校数学科の学習において証明をツールとした数学的探究を実現するために、累積的な授業をデザインする原理・原則、教材群や学習指導法を開発した。これらの成果は、授業実践データに基づき評価・改善したものである。また、数学的な内容とともにツールとしての証明を洗練し、ツールとしての証明や証明することの用い方の熟達の漸次実現を授業実践により例証した。

研究成果の学術的意義や社会的意義  
とりわけ社会的意義として、証明をツールとする数学的探究の授業実践が促進するとともに、証明の構成のみをゴールとする、あるいは事柄の推測からのみ数学的探究が始まるという数学教育観の転換が促進することが期待される。

研究成果の概要（英文）：This research has developed the principles of designing lessons, teaching materials and teaching methods in order to enable junior high school students to use proof(s) as a tool in mathematical exploration. This results has been improved based on the data classroom practices. The data classroom practices also illustrated the gradual realization of mastery of how to use mathematical proof(s) and proving along with mathematical contents.

研究分野：数学教育学

キーワード：中学校数学 証明 授業デザイン

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

証明をツールとして活用することの必要性・重要性は認められているが、子どもたちの学習状況は望ましい状況になく、学習指導の改善が喫緊の課題である。例えば、中学校学習指導要領数学において第2学年 B(2)ウに「図形の性質を読んで新たな性質を見だし」が位置付けられている。しかし、全国学力・学習状況調査等の結果は、子どもたちの学習状況は望ましい状況でないことを示している(国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2012 など)。

中等教育段階の生徒を対象にした累積的な授業のデザインとその効果の検証がまだ十分議論されていない。証明をツールとして活用するためには、証明を構成する側面のみならず、証明の適否を判断したり、証明を読解したりする側面も含める必要がある。論(argument(s))がある事柄の証明を構成するか否かを学習者は判断できるか否かに着目する研究(Alcock & Weber, 2005; Selden & Selden, 2003 など)や、証明の読解(reading comprehension of proofs)に着目する研究(Yang & Lin, 2008)もあるが、いずれも教室での授業における子どもの活動を対象としたものではない。

「仮説的学習軌道」(Simon, 1995)に基づき単元全体にわたり証明をツールとする授業のデザインに着目する研究は初期段階にあり、前期中等教育段階において、複数領域・複数学年に渡る学習指導の結果、いかに望ましい学習が実現するのかについては、数時間あるいは単元に渡る授業結果からの推定に留まっている。

また、各教科書において、数学的探究の側面、例えば、証明を構成するなどの問題は用意されているものの、それら諸側面が包括的に網羅されることになるような数学的探究に関する学習指導は教師に委ねられている現状がある。また、証明をツールとして数学的探究を進めようとする際に、ある事柄の推測→証明の構想→証明の構成→証明(所産)と証明すること(過程)の評価・改善が想定されているが、証明を構想・構成できないために、評価・改善にたどり着けない学習状況もみられる。

そこで、数学的探究を展開するための教材群や授業デザインを提供する。この授業デザインでは、A事柄の推測、B証明の構想、C証明の構成、D証明(所産)と証明すること(過程)の評価・改善、E新たな推測・事柄の生成・別証明の構想及び構成、という諸側面からなる数学的探究を、活動の契機を上述の事柄の推測(A)から固定せず活動が循環的に継続することを強調する。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、証明をツールとした数学的探究を実現するための累積的な授業をデザインすることである。

## 3. 研究の方法

まず、数学的探究におけるツールとしての証明の概念を規定する。次に、証明をツールとして数学的探究することの学習で意図する内容と活動を特定する。さらに、証明をツールとした数学的探究についての授業をデザインするための原理・原則を設定する。

この開発原理・原則に基づき、単元、授業毎の学習指導の重点、教材や教師用指導書(暫定版)を具体化する。次いで、この暫定版教材や教師用指導書を基に授業を実施し、意図した活動を実現するための改善点を特定し、改訂版教材や教師用指導書を開発する。最後に、改訂版教材や教師用指導書の実施による効果の検証を踏まえて更なる改善点を特定し、教材や教師用指導書に反映する。なお、授業デザインは、中学校3年間に渡る意図的・計画的な学習指導を念頭に、領域「図形」及び領域「数と式」に焦点をおく。

## 4. 研究成果

### (1) 数学的探究におけるツールとしての証明の概念規定

数学的探究におけるツールとしての証明の概念規定、ツールとして証明を用いることを踏まえた証明することの概念規定について先行研究を参照しつつ検討した。その結果、まず、証明することの意味を「前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する」こととした。その上で、ある探究者にとって証明がツールとなるためには、少なくとも、「探究者、目的、証明」のセットが必要であり、このセットを活動分析の単位として設けることとした。

### (2) 証明をツールとした数学的探究についての授業デザインのための原理・原則の設定

上述の数学的探究におけるツールとしての証明の特徴に基づき、授業における重点として、「探究者自身が素朴な証明を構成すること」、「その素朴な証明から証明の構成要素を顕在化すること」、「証明する目的に照らして評価・改善することを初期から導入すること」を導いた。これらに加えて、実施した授業データに基づき吟味した結果、数学的探究の契機となる課題について暗黙のうちに原理・原則を設定したことが判明し、「状況を厳密な表現を用いずに表し、証明を基に状況を明確にしたり、新たな状況を生み出したりすることができる余地がある課題を

用いる」を加えることにした。関わって、原理・原則での評価・改善の対象を、証明のみならず事柄を含めることにした。さらに、原理・原則として、「事柄と証明の関係、あるいは証明の役割についての探究者の認識を深める」も加えることにした。

最終的に、授業デザインのための5つの原理・原則を以下のように整理した。証明する目的に係る原理・原則として、(1)事柄と証明の関係、あるいは証明の役割についての探究者の認識を深めること。授業において中心的に取り上げる問題/課題に係る原理・原則として、(2)状況を厳密な表現を用いずに表示し、証明を基に状況を明確にしたり、新たな状況を生み出したりすることができる余地がある課題を用いること。授業における活動に係る原理・原則として、(3)探究者自身が素朴な証明を構成する機会を設定すること、(4)その素朴な証明の構成要素を教師の導きの下で生徒が顕在化する機会を設定すること、(5)証明する動機・目的に照らして証明や事柄を評価・改善する機会を初期から設定すること。

### (3)領域「図形」における授業デザイン

①証明をツールとした数学的探究を実現するため、用語「証明」が導入される以前の単元「図形の調べ方」における授業をまずデザインした。動的幾何環境下における中学校第2学年での単元「図形の調べ方」の特徴は、以下の三点である。第一に、推測するために極端に特別な場合について調べる。第二に、推測したことをある一つの図に対して厳密ではないものの既習の図形の性質を根拠に演繹的に考えること。第三に、厳密ではないものの既習の図形の性質を根拠に演繹的に考えれば極端に特別な場合も含めその他の図の場合についても説明できそうであること。

研究協力者との授業実践に基づき、意図した学習活動が実現可能であることが検証された。さらに、単元「図形の調べ方」での学びを踏まえ、続く単元「図形の性質と証明」の冒頭では、教師の導きの下で、説明において図形の頂点に記号を付すこととともに、図形の性質を三角形の合同に着目して演繹的に考えること、見た目が若干異なる図を一つの図で代表させるというアイディア、それぞれの有用性を生徒は実感することとなった。その結果、ある図を伴って述べられた事柄に対して、構成した証明が成り立つか否かという検討に留まらず、構成した証明が成り立つ図は何かという検討が促され、事柄と証明の関係、あるいは証明の役割についての生徒の認識を深めた。

②証明をツールとした数学的探究を実現するため、中学校第3学年での小単元「平行線と線分の比についての性質」の特徴は、以下の二点である。

第一に、中点連結定理の仮定をかえた図形の性質を探究することを促すことである。これは、中点連結定理を契機に、辺の長さをどのように分けると平行になるのかについて予想したことを三角形の相似を用いて証明したり、そのようにして得た命題の逆が成り立つか否かを探究したりすることを意図している。この探究の結果を、「平行線と線分の比」あるいは「線分の比と平行線」の性質として生徒はまとめる

第二に、第一の文脈において、四角形の中点同士を結んでできた四角形の性質に焦点化し、動的に変化する図形の構成要素の関係、及び図形と証明の関係に着目する活動を通して、統合的な考察を促すことである。なお、この探究において、状況を表すために用いられた「くさび形」、「スリッパ形」、「リボン形」は生徒が表明したものである。これは授業デザインの原理・原則(2)を踏まえ想定していることである。

研究協力者との授業実践に基づき、意図した学習活動が実現可能であることが検証されるとともに、次の三つの成果が明らかになった。まず、図形を見た目でまとめようとする状態から証明することを通して理でもって統合しようとする状態への移行が促進されたことである。次に、帰納的に考えたり、類推的に考えたりして推測したことを証明することが自然に誘発された。例えば、凸な四角形の中点同士を結んでできた四角形の性質とその証明を基に、「くさび形」の中点同士を結んでできた四角形の性質についての証明を構成するなどである。そればかりでなく、凸な四角形や「くさび形」についての証明を基に「スリッパ形」や「リボン形」の四角形の中点同士を結んでできた四角形の性質について考えることが同様に誘発された。これら三つの成果は、物事を固定的なもの、確定的なものと考えず、不断の考察を通じて事象の本質をあぶり出すことを具体化したものである。

### (4)領域「数と式」における授業デザイン

証明をツールとした数学的探究を実現するために、「数と式」についても、中学校第2学年での単元、それを踏まえた第3学年の単元、とりわけ、小単元「簡単な多項式」において証明することについての授業をデザインした。

しかし、研究協力者との授業実践を予定していたもの、コロナ禍による制約を受けた学習活動と成らざるを得なくなった。そのため、機会をあらためて成果と課題を分析することとした。

#### <引用文献>

- Alcock, L. & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether

- an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Yang, K & Lin, F. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 宮崎樹夫, 茅野公穂, 中川裕之, 吉川厚, 清水静海, 岩永恭雄	4. 巻 -
2. 論文標題 数学教育の内容・活動に固有な非認知的スキルに対する教師による評価: 中学校数学における「探究的証明」に関する調査結果の考察	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 日本数学教育学会 第8回春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 271-276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bokhove Christian, Miyazaki Mikio, Komatsu Kotaro, Chino Kimiho, Leung Allen, Mok Ida Ah Chee	4. 巻 4:63
2. 論文標題 The Role of "Opportunity to Learn" in the Geometry Curriculum: A Multilevel Comparison of Six Countries	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Frontiers in Education	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3389/feduc.2019.00063	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 茅野公穂, 宮川健	4. 巻 -
2. 論文標題 数学教育の内容・活動に固有な非認知的スキルの評価法の開発: 「証明すること」における調査結果の考察	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本数学教育学会 第7回春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 187-194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Sasa, H., Fujita, T., Komatsu, K. & Shimizu, S.	4. 巻 4:31
2. 論文標題 Curriculum Development for Explorative Proving in Lower Secondary School Geometry: Focusing on the Levels of Planning and Constructing a Proof	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Frontiers in Education	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3389/feduc.2019.00031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Miyazaki, M., Nakagawa, H., Chino, K., Iwata, K., Komatsu K., & Fujita, T.	4. 巻 -
2. 論文標題 Domain-specific frameworks for curriculum development of explorative proving in junior high school mathematics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities (ICMI Study 24)	6. 最初と最後の頁 269-276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 茅野公穂	4. 巻 575
2. 論文標題 図形領域が目指す新しい授業づくり	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 新しい算数研究	6. 最初と最後の頁 8-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 茅野公穂, 清水あかね	4. 巻 -
2. 論文標題 課題探究として証明することを実現する指導法開発: 第1学年の小単元「基本的な作図」	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本数学教育学会 第5回春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 15-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件(うち招待講演 0件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Miyazaki, M., Nakagawa, H., Yoshikawa, A., Chino, K., Miyakawa, T., Fujita, T., & Shimizu, S.
2. 発表標題 Assessment of non-cognitive skills specific to contents and activities of school subjects: with a focus on "mathematical proof" in junior high school mathematics
3. 学会等名 World Education Research Association 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bokhove, C., Miyazaki, M., Leung, A., Mok, I., Komatsu, K., & Chino, K.
2. 発表標題 The role of 'opportunity to learn' in the geometry curriculum: A multilevel comparison of six countries
3. 学会等名 2019 American Educational Research Association Annual Meeting (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中川裕之, 佐々祐之, 榎本哲士, 茅野公穂
2. 発表標題 科学教育の内容・活動に固有な非認知的スキルの評価法の開発: 領域「数と式」における調査内容について
3. 学会等名 日本科学教育学会 第42回年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 湯本哲, 田代佑夏, 高橋和幸, 井出幸輔, 水野真二郎, 三崎隆, 村松浩幸, 天谷健一, 茅野公穂, 谷塚光典, 神原浩, 市川公明
2. 発表標題 実生活で有機的に活用できる資質・能力を育てる科学教育カリキュラムの開発(1): 小学校低学年かがくにおける実践を事例に
3. 学会等名 日本理科教育学会 第68回全国大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮崎樹夫, 茅野公穂, 小松孝太郎, 松永泰幸, Bokhove, C., Leung, A., Mok, I.
2. 発表標題 領域固有な方法知を生成しようとする態度を養うタスクデザイン: オープンな場面で証明することを例として
3. 学会等名 日本科学教育学会 第41回年会
4. 発表年 2017年

## 〔図書〕 計4件

1. 著者名 蒔苗直道・松浦武人	4. 発行年 2021年
2. 出版社 協同出版株式会社	5. 総ページ数 201
3. 書名 新・教職課程演習 第13巻 初等算数科教育	

1. 著者名 溝口達也	4. 発行年 2021年
2. 出版社 ミネルヴァ書房	5. 総ページ数 251
3. 書名 新しい算数教育の理論と実践	

1. 著者名 算数科教育学研究会(編)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 217
3. 書名 新版 算数科教育研究	

1. 著者名 永田潤一郎, 佐々祐之, 茅野公穂, 岩田耕司, 松元新一郎, 長谷川英和, 清水あかね, 永海哲広, 石綿健一郎	4. 発行年 2018年
2. 出版社 ぎょうせい	5. 総ページ数 254
3. 書名 平成29年改訂 中学校教育課程実践講座 数学	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------