

令和 2 年 7 月 3 日現在

機関番号：14201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K04773

研究課題名(和文) 高等学校数学科における「証明指導」の基礎的研究

研究課題名(英文) Study on teaching mathematical proving in high school

研究代表者

渡邊 慶子(向井慶子)(Watanabe-Mukai, Keiko)

滋賀大学・教育学部・講師

研究者番号：00572059

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、高等学校数学科における証明指導の改善のために形式的証明と決定問題の解決を接続する数学的探究活動の枠組みを開発することである。本研究は、高等学校数学科における「証明指導」の現状と課題を把握して「形式的証明」と「決定問題の解決」を接続する数学的探究活動の枠組みを「三角比」の教材で具体化しながら、開発することである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高等学校数学科における「証明指導」には、「形式的証明」の必要性という点で、先行研究では明らかにされていない「探究活動」が必要である。高等学校では、「形式的証明」による結論を「定理」として、決定問題の解決に用いるという点で、小・中学校の証明指導とは異なる活動を重視できる。

研究成果の概要(英文)：The purpose of the study is to develop the frame of the mathematical activity that connects the formal proof with the solution of the decision problem for the improvement of teaching mathematical proving in the high school.

研究分野：数学教育学

キーワード：証明 定理 問題解決

## 1. 研究開始当初の背景

平成29年度3月に「新学習指導要領」が公示されて以来、「主体的・対話的で深い学び」が強調され、探究的な活動を促す授業の実現が高等学校の教育現場に求められている。探究的な活動には、具体的な多数の「情報」を並べたり、分類したりして、その「情報」の特徴を取り出す作業が必要であることが強調され、具体的な教育改革として、高等学校数学科のカリキュラム・学習内容編成においても「統計処理」的な学習内容の一層の充実が掲げられた。算数・数学科でも資料の整理・活用に関する授業場面がより一層注目された。

しかし、「数学的に処理すること」だけに授業のねらいや内容・方法が偏ってしまうとすれば、それは問題視されるべきであろう。算数・数学科授業において、「なぜ、そのような処理が出来るのか」、「この処理はどのような数値に対しても同様に可能なのか」など、「数学的な処理」の背景にある「数学的内容」へ生徒たちが主体的に関与する場面を希薄にはしていないだろうし、そのような場面にこそ、教師は「探究的な活動」を設定しようとするはずである。「探究的な活動」を算数・数学科の授業で取り入れるとなると、数学の学習指導に固有な「情報の収集」「情報の整理」の仕方だけでなく、「情報の論理的・数学的分析」も重視されなくてはならないし、そのような数学の学習指導に固有な観点は、算数・数学科の教材に具体的なかたちで示されなくてはならない。本研究はそのような「情報を論理的・数学的に分析する」取り組みの一つとして、「数学的現象の探究としての証明」に着目している。特に「探究的な活動」を促す教材として、証明教材を具体的に提案することを通して、高等学校数学科の証明指導を見直そうとするものである。

これまでも「証明」は、中学校2年生の学習内容であることから、「証明指導」に関する研究は、中学校数学科の実践に基づいて進められてきた（例えば、宮崎, 2009）。さらに、小学校算数科でも「証明指導」の実施可能性や実施する必要性が、主張されている。小学校算数科における「証明指導」に関する研究は、2000年代から国内外で盛んになっている（例えば、小松, 2014）。特に、小学校での「証明指導」の必要性は、作図や操作的活動を、命題を探究することに主眼をおいた非形式的な証明とみなすことによって主張された（例えば、関口, 2002; 岡崎, 2010; 小松, 2014）。

一方、高等学校数学科における「証明指導」に関する研究には、「形式的証明」の必要性という点で、算数科における探究活動とは異なる活動が必要である。「形式的証明」は記号を用いて演繹的な組み立てによって命題の真偽を明らかにする行為である。高等学校数学科では、真偽を証明した後の「命題」を「定理」とし、その「定理」を用いて決定問題を解決する。決定問題とは、「未知のものをみつける目的」の問題のことであり（ポリア, 1954）、数学科においては、未知数を求める問題を意味する。高等学校の授業の大半の時間は「ある定理を用いて複数の決定問題を解く」ことである。そのために「定理」は適用範囲の広い、いわゆる「一般化」された命題として表現される必要がある。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、高等学校数学科における証明指導の改善のために、「形式的証明」と「決定問題の解決」を接続する数学的探究活動の枠組みを開発することである。数学教育研究において、「証明指導」は小学校算数科と中学校数学科の指導について盛んに探究されている。一方、**高等学校数学科における「証明指導」には、「形式的証明」の必要性という点で、先行研究では明らかにされていない「探究活動」が必要である。**高等学校では、「形式的証明」による結論を「定理」として、「決定問題の解決」に用いるという点で、小・中学校の「証明指導」とは異なる活動を重視できる。本研究は、高等学校数学科における「証明指導」の現状と課題を把握して、「形式的証明」と「決定問題の解決」を接続する数学的探究活動の枠組みを、「三角比」の教材で具体化しながら、開発することである。

## 3. 研究の方法

高等学校数学科では、「形式的証明」と「決定問題の解決」との関連が「数学的探究活動」の根幹として重視されるべきである。また、そのような「数学的探究活動」が数学教育学において、理論的にも実証的にも探究される必要がある。そのためには、高校生・数学担当教師がそれぞれに「決定問題解決に用いた定理」と「その定理の証明」に対してどのように意味づけたり認識したりしているのか、つまり、高校生・数学担当教師の「証明概念（Healy&Hoyles, 2000）」を捉えなくてはならない。以上から、「証明指導」に関する研究において、残された主な課題は、次の2点と考えた：①「形式的証明」と「決定問題の解決」とを接続する「数学的探究活動」の明確化、②高校生・数学担当教師の「証明概念」に関する中規模調査（県内調査）やインタビュー調査の実施による現状把握。

先の2つの課題について、本研究の期間内に次の3つの研究テーマを立て、3年間の研究機関に順次執り行った：(1)「証明概念」について考察・調査（インタビュー調査を含む）すること、(2)「決定問題」と「証明問題」の捉えと位置づけに関する先行研究を整理すること、(3)「決定問題」と「証明問題」の取り組みを接続する

## 4. 研究成果

### (1)「証明概念」について考察・調査（インタビュー調査を含む）すること

ここでは、「証明指導に関する考え方」と「証明とは何か」についての教師の捉えを明らかにすることにした。具体的には、高等学校で数学を担当する教員6名（経験年数5年未満1名、経験年数10年1名、経験年数20年以上3名）にインタビュー調査を行った。

「証明指導に関する考え方」に関しては、「証明をすることについて自分自身がどのように考えているか」並びに「授業の中で証明をすることについてどのように考えているのか」についてそれぞれインタビュー調査をした。結果として、まず「証明をすることについて自分自身がどのように考えているか」について、6名全員が「重要であると考えている」と回答した。中でも経験年数20年以上の3名の教員は、「数学の定理が本当に成り立つのかどうかを確認することが証明をする意義である」と述べ、「定理」、「証明」、「定理の応用問題」といった順に授業を進めることが理想であるとも強調した。この結果、定理の確証のための証明の機能に被験者の半分以上が着目していることが分かった。次に「授業の中で証明をすることについてどのように考えているのか」については、上記の6名による座談会形式でのインタビュー調査とした。結果として、「証明」を生徒にさせる機会は限られた定理であり、多くの場合、教師が生徒に向けて簡単な解説をしたり、口頭で証明を述べたりする程度にとどまらせていると意識されていることが分かった。

「証明とは何か」についての教師の捉えに関しても上記6名の座談会によってデータを得た。その結果、全体として、定理が真であることを示す数学的な保証となる言明であるとされた。また、高校数学で取り扱う証明の代表例として、「数学的帰納法を用いた証明」「背理法」などの間接証明法の特徴的な構造が挙げられた。このことから、6名の高校数学教師が、証明を証明の構造によって分類していることがうかがえた。これは、代数表現を多用した数学に関する記述を「証明」とみなす高校・大学生の状況(Healy & Hoyles, 2000)とは異なって、証明の構造、構成のされ方に着目しているという高校数学教師の証明への見方に関する一つの傾向を明らかにしたと言える。

一方で、証明をした定理の具体的な内容や解釈、証明をすることによる数学的な理解に言及するような話題は、インタビュー中にはなかった。このことから、数学指導において、「証明をすること」自体が主要な目的として教師たちに捉えられていることがうかがえた。

### (2) 「決定問題」と「証明問題」の捉えと位置づけに関する先行研究を整理すること

ここでは、「形式的証明」と「決定問題の解決」を接続する数学的探究はどのように行われるかを明らかにすることに関わる研究を進めた。

証明の意義を認め、必要感をもつことの重要性は、これまでも強調されてきた(國本, 1998; 國宗, 2003; 岡崎, 2010)。特に、算数科で操作や実測、あるいはICTを用いた活動を取り入れることによって、子どもたちに証明の仮定と結論を具体的に意識させ、推論の必要性を意識させる取り組みについて、多くの研究成果が理論的にも実践的にも蓄積されてきた。これらの研究では、操作の順序性に着目して性質を命題のかたちにし、その命題の真偽を明らかにする方法として証明を導入させる学習段階に焦点が当てられている。

一方、生徒たちの証明の概念は、中学2年生で証明を導入した後も証明の意味内容や構造の探究を通して形成され続けていくはずであるが、そのための学習指導に関して、数学教育研究上で確かな研究成果が十分に蓄積されているわけではないだろう。しかし、生徒たちの証明の概念について、問題点はいくらか指摘されており、特に、証明の意味理解をねらいとした学習指導に関しては、理論的にも実践的にも研究を積み重ねる必要がある。例えば、HealyとHoyles(2000)は、証明のしくみを学習した後の中学生たちが、証明を構文論的な観点で評価することはできても、証明の意味内容に関連して評価することは難しい状態にあることを報告した。氏らは、中学生たちが証明をどのように捉えているのかを調査し、その際、生徒たちが証明することを儀式と捉えていて、意味内容にかかわらず、代数的な記述さえ用いられていれば、その記述を証明とみなすことさえあるとしている。つまり、証明の記述の意味内容と構造に関わって考察したり評価したりすることの困難性や、そのような学習をする機会の少なさが指摘されたのである。

証明の実用性・必要性の在りどころはどこにあるのか。この問いに対して、本研究ではHannaらの「プログラマティックな証明観」に着目した。女史らによれば、同じ定理の証明でも、「証明のための証明」と「説明のための証明」があるとして、目的に照らして証明を分類している。

### (3) 「決定問題」と「証明問題」の取り組みを接続することによって生じる「数学的探究活動」を理論的及び実証的に明らかにすること

ここでは、「形式的証明」と「決定問題の解決」を接続する数学的探究を取り入れた高校数学の授業とはどのようなものになるかに関する「正弦定理」に関わる指導内容の具体的な想定を基にして、実践をしてデータを取り、それらからどのような活動が生まれるのか、それがどのように証明につながるのかを考察した。

ここでは、数学I「三角比」の正弦定理を問題解決の方略から導出するために、次のような授業の展開案を構想した。

この展開案は、高等学校数学科の単元構成において、＜与えられた「定理」の正当化の説明＞としての証明の前に、＜問題解決から「定理」を導出する＞としての証明活動を想定する。今後、本研究では、高等学校第1学年「数学I」の単元構成として精緻化し、実践した。第1次と第6次の概要を、提示する問題と予想される生徒の解決によって示す。

(3-1) 第1次：三角形構成要素の大きさを求める方略の一般化

① 既知の方略の利用による問題解決

問題 (1) 「 $\triangle ABC$  において,  $\angle A=60^\circ$ ,  $\angle C=45^\circ$ ,  $c=6$  のとき,  $a$  を求めよ」

問題 (1) は, 中学校第 3 学年の「三平方の定理」と「円周角の定理の逆の応用」によって解決できる (図 1). このとき, 与えられた角度と辺の長さがデータであり, 「 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の三角形 (正三角形の半分)」や「 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  の三角形 (正方形の半分)」の 3 辺の比が分かる直角三角形になるように補助線をひいていることが方略である. 直角三角形の辺の比と角の関係を利用して未知数を求めている.

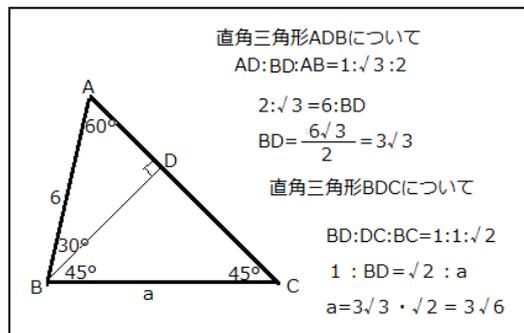


図 1 問題 (1) の解法例

② 既知の方略の適用と概念化

問題 (2) 「 $\triangle ABC$  において,  $b=4$ ,  $A=30^\circ$ ,  $B=135^\circ$  のとき,  $a$  を求めよ」

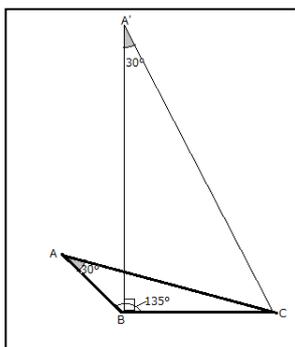


図 2.1 方略の概念化

直径とする円において弧  $BC$  の円周角として  $\angle A = \angle A'$  となる点  $A'$  が決まる. このとき,  $a:1=2R:2$  より  $2R=2a$  (...①) となり,  $R=a$  であることがわかる. 「直角三角形となるように三角形を分割する」から「直角以外の角のいずれかが,

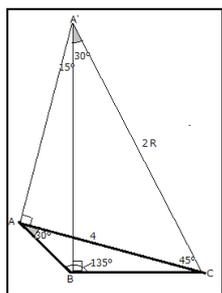


図 2.2 問題 (2) の解決

(1) と同様の方略では, 3 辺の比のわかる直角三角形はうまく作れない. 既知の方略は適用されるが失敗に終わる. また, 問題の三角形が「そもそも存在するのか」という疑念が生まれたならば, 「[4] 未知数の存在の検討」をする. データとしての角度や辺の長さを用いて, 例えば, 作図できるかどうかを確認し, さらに「三角形の内角の和は  $180^\circ$  である」ことを認めれば,  $\angle C=180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$ , 1 辺 ( $AC$ ) の長さとその両端の角度  $\angle A$ ,  $\angle C$  の大きさが定まった  $\triangle ABC$  は一意に決まるといったように, 三角形の合同条件を想起しながら三角形の存在条件を吟味することができる.

次に,  $30^\circ$  と  $90^\circ$  の角をもち, 求める長さ  $a$  を一辺とする直角三角形をつくると, 図 2.1 のようになり,  $A'C (=2R)$  を直径とする円において弧  $BC$  の円周角として  $\angle A = \angle A'$  となる点  $A'$  が決まる. このとき,  $a:1=2R:2$  より  $2R=2a$  (...①) となり,  $R=a$  であることがわかる. 「直角三角形となるように三角形を分割する」から「直角以外の角のいずれかが,  $30^\circ, 45^\circ$  又は  $60^\circ$  となる直角三角形をつくる」という方略が概念化されている.

さらに, 問題解決のため, 既に長さが示されている「4 ( $\angle B$  の対辺  $b$  の値は 4)」に三角形の辺の比を対応させるのに,  $2R (=A'C)$  と  $AC$  を 2 辺にもつ直角三角形  $AA'C$  を考える (図 2.2). その結果,  $\angle CAA'=90^\circ$ ,  $\angle AA'C = \angle A'CA = 45^\circ$  の直角三角形ができる. そして,  $AC:1=A'C:\sqrt{2}$  より  $2R=4\sqrt{2}$  (...②) によって, 解  $a=2\sqrt{2}$  が求められる.

③ 既知の方略の適用可能性の検討

問題 (3) 「 $\triangle ABC$  において,  $a=2$ ,  $c=5$ ,  $C=90^\circ$  のとき,  $\angle A$  を求めよ」

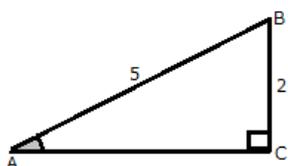


図 3 : 三角比の導入

問題 (3) によって, 既知の三平方の定理などを用いて, 図 3 において大きさが分かっていない辺や角を明らかにしようすることが想定できる.

$\angle A$  を保って  $2AB=AB'$  となるように  $AB$  の  $B$  方向の延長線上に点  $B'$  をとり,  $2AC=AC'$  となるように  $AC$  の  $C$  方向の延長線上に点  $C'$  をとるなどして, 「正弦・余弦・正接」を導入する.

次に, 「 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 」の三角比の学習を通して, これまで 2 つの直角三角形「 $30^\circ$ ,

60°, 90°の三角形（正三角形の半分）」と「45°, 45°, 90°の三角形（正方形の半分）」の辺の比と角の関係を三角比の見地から捉え直す。

この後、第2次～5次と進む。三角比の導入によって、三角形の構成要素の一般化が図られる。

（3-2）第6次：問題（2）の方略の探求による「正弦定理」の導出

① 概念化した方略の再表現

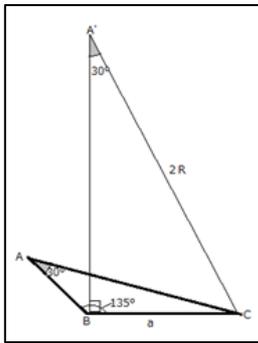


図 4.1 「正弦定理」の導出（1）

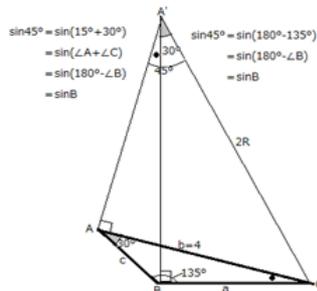


図 4.2 「正弦定理」の導出（2）

問題（2）の解決方法は、まず、求める値  $a$  を一辺とする直角三角形をつくるために、円周角の定理の逆を用いて、 $\triangle ABC$  の外接円の半径  $R$  と  $a$  との関係式を  $R=a$  とした（問題（2）①式を参照）。これができたのは、 $\triangle BA'C$  が「30°, 60°, 90°の三角形（正

三角形の半分）」であるためであった。次に、問題で与えられている値（ $b=4$ ）と辺の比を対応させるため、 $b$  と  $2R$  を2辺とする直角三角形をつくってきた三角形が「45°, 45°, 90°の三角形（正方形の半分）」だったので、 $R$  の値を求めることができ（問題（2）の②式を参照）、最後に  $a$  を算出した。三角比をあらわす新たに得た表現で再度問題（2）の①式を表現すると、 $\sin A = a/2R$  が導出される（図 4.1）。即ち、①式より、「三角比とは何であったか（第1次）」に立ち返ると、直角三角形  $A'BC$  の  $\angle A'$  の正弦は比の値  $BC/A'C$  で表わされ、一定である。また、問題（2）②式では、 $\sin B = b/2R$  が導出される（図 4-2）。

$\angle AA'C$  の見方は多様にある（「円に内接する四角形の  $\angle B$  の対角」又は「円周角の定理より、 $\angle AA'B + \angle BA'C = \angle C + \angle A$  なので、 $180^\circ$  から  $\angle B$  を引いた大きさに等しい」）。 $\angle AA'C$  の正弦は  $\sin B$  に等しいことを用いれば、 $\triangle AA'C$  について、 $\sin B = b/2R$  と表わすことができる。これらから、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$  が導かれて、 $\angle C$  についても同様であることが推測できる。

② 概念化した方略の検討

また、問題（2）を問題（1）の方略（図 5）でふり返れば、直角三角形  $BAD$  について  $\sin A = BD/c$ 、直角三角形  $BCD$  について、 $\sin C = BD/a$  となり、 $c \cdot \sin A = a \cdot \sin C$  即ち、 $a:c = \sin A:\sin C$  や  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$  も見いだすことができる。さらに、問題（1）の方略を問題（2）の方略に沿って解決を図ると、図 6 を用いて解決できる。以上より、「既知の方略の利用による問題解決」、「既知の方略の適用と概念化」、「既知の方略の適用可能性」、「概念化した方略の再表現」、「概念化した方略の検討」という5段階があると想定した。段階を経て、問題解決の際の試行錯誤も介して導出した「定理」は、生徒たちにとって正当化すべきもの、あるいは、その真偽を明らかにすべきものになっていると考える。

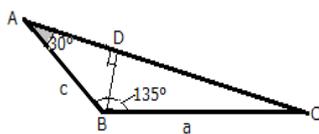


図 5 方略の検討

誤も介して導出した「定理」は、生徒たちにとって正当化すべきもの、あるいは、その真偽を明らかにすべきものになっていると考える。

（3-3）決定問題と証明問題の行き来によって生じる証明活動

これらから、「証明問題」と「決定問題」を接続する証明活動の指導の枠組みは次のように示すことができる：【決定問題の概念化】a) 既知の方略の利用による問題解決 b) 既知の方略の適用と概念化 c) 既知の方略の適用可能性の検討 【定理の導出】d) 概念化した方略の再表現 【決定問題の解決方略に準ずる証明方略の導出】e) 概念化した方略の検討尚、主要な研究成果は、本研究課題の報告書として最終年度にまとめられている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 渡邊慶子、篠原雅史、山下亮、上野隼、高橋利彰	4. 巻 32
2. 論文標題 算数・数学科における探究的な活動を促す教材の開発研究 - 「二次方程式の解」の探究を事例として -	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 近畿数学教育学会誌	6. 最初と最後の頁 1 - 13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子、岡崎正和	4. 巻 51
2. 論文標題 証明言語の生成と振り返りを通した仮定の意識化に関する研究	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本数学教育学会第51回秋期研究大会発表集録	6. 最初と最後の頁 503 - 506
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 渡邊慶子、岡崎正和
2. 発表標題 証明言語の生成と振り返りを通した仮定の意識化に関する研究
3. 学会等名 日本数学教育学会第51回秋期研究大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊慶子、岡崎正和
2. 発表標題 証明の仮定の意識化に関する研究-その意義と方法-
3. 学会等名 全国数学教育学会第49回研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keiko Watanabe
2. 発表標題 The Investigation of Teachers' Conception of Formulae
3. 学会等名 Proceedings of the 41th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡邊 慶子
2. 発表標題 「証明活動」に関する研究 - 正弦定理の証明を事例として -
3. 学会等名 全国数学教育学会第47回研究発表大会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考