

令和 2 年 6 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05156

研究課題名(和文) グラフの代数的研究の展開

研究課題名(英文) Development of the algebraic study of graphs

研究代表者

田中 太初 (Tanaka, Hajime)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：50466546

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：グラフの各頂点に対して定まる Terwilliger 代数等の非可換半単純行列代数の表現論の応用の研究を行い、所謂相対デザインの構造や存在性に関する成果等を得た。量子確率論等への応用の研究の過程で、新たな1変数超幾何ローラン直交多項式及び2変数超幾何直交多項式の系列を見出し、漸化関係式等を記述した。また、量子情報理論に関連したある種の予想を代数的組合せ論の手法を援用して証明した。研究計画期間中には他にも量子確率論や情報理論等に関するプロジェクトを複数立ち上げており、順次研究成果を公開していく予定である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数的グラフ理論或いはグラフのスペクトル理論は、情報理論等の工学的分野とも直接関わって発展してきたが、代数的観点からは隣接代数に基づいた「可換」の理論であった。一方本研究は非可換代数である Terwilliger 代数等に基づき新たな応用を開拓するもので、これらの理論を「非可換化」或いは「量子化」する試みであると言える。今回特に重点的に行った量子確率論との連携の研究は実際2009年頃より構想を進めてきており、解析する例の多変数化等について一定の成果を上げることができたのは大きな進展である。

研究成果の概要(英文)：I explored applications of the representation theory of non-commutative semisimple matrix algebras, such as the Terwilliger algebra which is defined for each vertex of a graph, and obtained results, for example, about the structure and non-existence of so-called relative designs. In the process of studying applications to quantum probability theory and so on, I found new families of univariate hypergeometric Laurent orthogonal polynomials and bivariate hypergeometric orthogonal polynomials, and described their fundamental properties, such as recurrence relations. Besides, I proved a certain conjecture related to quantum information theory, with the help of a technique from algebraic combinatorics. During the period of the research plan, I also started several other projects related to quantum probability theory and information theory, etc., and I plan to publicize the outcomes whenever they are ready.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：アソシエーションスキーム 距離正則グラフ Terwilliger 代数 グラフのスペクトル

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

完全グラフの特殊な分割である**アソシエーションスキーム**(以下 AS と略記)は有限群の等質空間の組合せ的性質を抽出した概念であり、所謂**距離正則グラフ**には 2 点等質空間に相当する AS が自然に対応する。グラフの各頂点に付随する非可換半単純 \mathbb{C} -代数である **Terwilliger 代数**は所謂 Q -多項式距離正則グラフの構造の研究のための道具として本来導入されたが、近年になって、従来の(可換)隣接代数に代わり、(非可換)Terwilliger 代数を AS や距離正則グラフ上の符号やデザインの解析に本格的に用いる試みが行われ始めた。一方、量子確率論で用いられる古典確率変数の**量子分解**は一種の「非可換化」の操作であるが、尾畑伸明等により研究されている距離正則グラフの隣接行列の量子分解は、実際隣接代数から Terwilliger 代数を構成するプロセスにほぼ相当する。

Martin 氏との共著論文(European J. Combin. 30 (2009))では、これらの研究を背景として、Terwilliger 代数に基づき応用理論を整備する構想を提唱した。また、Van Dam 氏及びKoolen 氏と共同で、距離正則グラフの基礎理論(特に分類理論)、さらに上述の符号理論や量子確率論に加えて組合せ最適化やランダムウォーク、スピンモデルの理論等への応用まで網羅した概説論文の執筆に 2010 年夏より取り組み、2016 年 4 月に最終版(156pp.)が出版された(Electron. J. Combin. (2016))。この執筆作業には多大な時間と労力を要したが、これにより得られた距離正則グラフや AS の構造理論・応用理論に関する膨大な知見やデータの蓄積は、本研究計画の基盤となるものである。

2. 研究の目的

近年徐々に開発されつつある Terwilliger 代数及び関連した行列 \mathbb{C} -代数の表現論の応用の手法の整備をさらに進めるとともに、距離正則グラフや AS とは必ずしも限らない種々の有限単純グラフの部分構造の研究に適用していくことを主目的とした。

3. 研究の方法

以下の 3 項目(1)~(3)に大別して研究を進めた。

(1) **Terwilliger 代数の表現論**. Terwilliger 代数が符号理論等に応用され始めたのは前述の通りであるが、Terwilliger 代数の表現論はまだ発展途上である。主要ないくつかの Q -多項式距離正則グラフの系列について、未完成である既約加群の分類・記述に取り組み一方、ここではさらに、Terwilliger 代数を自然に拡張・一般化したいいくつかの行列 \mathbb{C} -代数を取扱い、より広い観点から表現論を展開する。

(2) **半正定値計画の手法**. Schrijver (IEEE Trans. Inform. Theory 51 (2005))は、隣接代数の表現論と線形計画法を組合せた従来の Delsarte の手法を、Terwilliger 代数と半正定値計画法を用いて拡張した。Schrijver の手法は最適化理論に於いてはその後活発に研究がなされているものの、Delsarte の手法の核心である双対性を駆使する試みはほぼ皆無であった。

(3) **新しい応用の開拓**. 隣接代数に基づく Delsarte の理論では符号と組合せデザインが双対的に取り扱われるが、デザインの概念の拡張である**相対デザイン**を考察する上では Terwilliger 代数が主要な役割を果たす。相対デザインの本格的な研究は坂内-坂内 (J. Appl. Math. Comput. 40 (2012))により創始されたばかりであり、量子確率論に加えてこれらについても種々の課題に順次取り組む。

(4) 研究経費の主な用途は、パソコンや書籍等の購入費や研究集会等への参加のための旅費である。また、本研究計画に関連した複数の研究集会の開催に組織委員として関わった。主なものは以下の通りである。

「スペクトラルグラフ理論および周辺領域」(平成 29 年 10 月(鳥取大学),平成 30 年 11 月(北九州市立男女共同参画センター・ムーブ),令和元年 8 月(都城工業高等専門学校))

「The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2018)」(平成 30 年 5 月(仙台国際センター))

なお、に合わせて Silpakorn 大学(タイ)の Supalak Sumalroj 氏を招聘し、 Q -多項式距離正則グラフの Terwilliger 代数について講演をお願いした他、情報交換を行った。

4. 研究成果

上記3項目(1)~(3)それぞれについて成果を述べる。

(1) Terwilliger 代数の表現論.

Terwilliger 代数はグラフの固定した1頂点に付随して定まる非可換半単純行列C-代数であるが、North Florida 大学の Jae-Ho Lee 氏と共同で、重要な距離正則グラフの系列である双対極グラフに対して、固定した極大クリーク及びその中の1頂点に付随して定まる行列C-代数を考察し、この代数の所謂「主加群」がランク1のダブルアフィンヘッケ環のある種の退化(nil-DAHA)の既約加群にもなっていること、及び主加群の自然な基底からローラン直交多項式系(非対称双対 q -Krawtchouk 多項式)が構成されること等の成果を得た。共著論文を執筆し、既に出版されている(SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 14 (2018))。この共同研究は先行課題(25400034)の最終年度に開始したものであるが、論文執筆にあたって諸定理の精密化・改良を行った他、非対称双対 q -Krawtchouk 多項式の漸化関係等の新たな成果も盛り込んだ。なお、本研究テーマに於いて $q \rightarrow 1$ の極限の考察は非常に興味深い課題であり、国立中央大学(台湾)の Hau-Wen Huang 氏も加えて現在取り組んでいる。

鈴木寛(J. Algebraic Combin. 22 (2005))は Terwilliger 代数の定義を、1頂点ではなく頂点部分集合に拡張した。前項では、極大クリークと1頂点に関する二種類の Terwilliger 代数で生成された代数を考察したのである。距離正則グラフの頂点部分集合で代数的・幾何的に非常に良い性質を持つ **descendents** に関する Terwilliger 代数の表現論の研究を、田中利恵氏及び宇部工業高等専門学校の渡邊悠太氏とやはり先行課題(25400034)から継続して行った。本研究計画期間中では、この Terwilliger 代数が「thin」と呼ばれる性質を持つための判定条件を示した他、対蹠的二部距離正則グラフの既約加群の記述等を行った。網羅的な文献となることを意図して執筆中の共著論文は肥大しており、ページ数は80ページ近くになっているが、可能な限り早急に完成させたい。

私の学生の Tao Wang 氏と共同で、Van Dam と Koolen (Invent. Math. 162 (2005))により発見された非常に特異な距離正則グラフである**歪 Grassmann グラフ**の Terwilliger 代数の表現論の研究を行い、「thin」の場合について、非常に簡明なアプローチを見出すことに成功した。これは通常の Grassmann グラフの Terwilliger 代数に「近い」状況にある意味で帰着させるものであり、今後速やかに計算を終え、数ヶ月中に共著論文を完成させる予定である。

(2) 半正定値計画の手法.

Schrijver による半正定値計画の手法の計算例で双対性の観点からの理解が特に望まれるのが、de Klerk と Pasechnik (European J. Combin. 28 (2007))による**直交グラフ**(orthogonality graph)の独立数の上界である。このグラフは2進 Hamming AS $H(n,2)$ を定めるグラフの一つであるが、 $n=16$ のとき従来の線形計画法による上界が4096であるのに対し、半正定値計画法による上界は2304となり、しかもこれは(独立集合の具体的構成により)実際の独立数に一致する。Ghent 大学の Ferdinand Ihringer 氏と共同でこの課題に取り組んだが、研究の過程で n が2ベキの場合に全く別の手法で独立数を決定することに成功した。直交グラフの独立数の評価はある種の量子情報理論の問題と関連しており、この観点からは次元 n が2ベキの場合が本質的である。共著論文は組合せ論のトップ誌の一つに掲載された(Combinatorica 39 (2019))。先行研究では Frankl により n が奇素数ベキの場合に決定されており、一般の次元の場合について、引き続き Ihringer 氏と検討している。

極値集合論で有名な **Erdős-Ko-Rado の定理**は、Delsarte の線形計画法の手法を用いて完全な形で証明された。私は Delsarte の手法を「非可換化」し、半正定値計画法を用いて二つの部分空間族や集合族に関する交叉定理を証明する研究をこれまでに行っていた。この新しい手法は Lovász (IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979))の θ -関数限界の二部グラフ版とみなせる。 θ -関数は元々グラフの所謂 **Shannon 容量**を上から評価するものとして導入されたものであり、私は岩淵耕平氏と共同でこの「二部グラフ版」の基礎理論を整備することに加えて、これをさらに情報理論に「引き戻し」、Shannon 容量の概念の対応する拡張の考察を行った。この研究成果については現在共著論文を準備中である。

(3) 新しい応用の開拓.

量子確率論の観点から、距離正則グラフの Terwilliger 代数の主加群の成す「one-mode」相互作用 Fock 空間が考察されてきたが、これらの議論を多変数に拡張することが望まれていた。東北大学の尾畑伸明氏及び De La Salle 大学の John Vincent Morales 氏と共同で、強正則グラフとその補グラフそれぞれのベキの同時スペクトル分布を考察し、その極限分布を完全に決定

した。2変数正規分布や2変数Poisson分布に加えて、1変数の正規分布・Poisson分布の積が現れる。元の同時スペクトル分布には2変数Krawtchouk直交多項式が対応するが、後者の積分布に対応する極限として2変数超幾何直交多項式系を構成し、母関数や漸化関係式等を記述した。なお、分布自体は積であるが、1変数直交多項式の積ではなく新種の系列である。この成果に関する共著論文は令和2年中に出版される見込みである(Colloq. Math. (掲載決定))。

坂内英一氏・悦子氏及び上海理工大学のYan Zhu氏と共同で、先行課題(25400034)から引き続き、超立方体上の相対 t -デザインに関する研究を行った。本研究計画の期間中には特に、ブロックのサイズが2種類かつタイトな場合について、1変数超幾何直交多項式であるHahn多項式とHermite多項式の零点の性質、及び別途準備したある種の数論的結果を援用して、そのような例が「ほとんど存在しない」ことを示唆する定理を証明した。これはタイト組合せ t -デザインの非存在に関する坂内の結果(Quart. J. Math. Oxford 28 (1977))の(不完全な)拡張である。共著論文を執筆し、現在専門誌に投稿中である(arXiv:2006.02054)。なお、令和元年8月に山峡大学で開催された国際研究集会・サマースクール「Groups and Graphs, Designs and Dynamics」にてこの成果について招待講演を行う予定であったが、台風の影響等のためキャンセルとなった(スライドは研究集会のウェブサイトに掲載されている)。

項目の関連課題として、尾畑伸明氏、及び私のもとに半年間特別研究学生として滞在したAlexandre Louvet氏と共同で、隣接行列が互いに可換な同一頂点集合上のグラフ達の、それぞれのベキの同時スペクトル分布を考察し、極限分布が多変数正規分布になる場合については(自然に)想定される結果を証明した。多変数Poisson分布と正規分布の積の場合等、他の極限分布について一般的な結果を記述することは難しいように思われるが、ASに付随するグラフ等から様々な具体例の構成が可能であり、今後共著論文としてまとめることを検討したい。また、K. N. Toosi大学のMasoumeh Koohestani氏と共同で、所謂古典的パラメータを持つ距離正則グラフについて、変形真空状態の極限に関する研究を行った。尾畑・洞による量子中心極限定理を用いて、極限の場合分けを古典的パラメータの観点から行った。直径が発散するような既知の距離正則グラフの無限系列は全て古典的パラメータを持つか、或いはそのような系列に密接に関連しており、このアプローチによって既知の大部分の距離正則グラフを統一的に取り扱うことが可能となる。極限として得られる分布の記述に引き続き取り組み、共著論文としてまとめる計画である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 John Vincent S. Morales, Nobuaki Obata, and Hajime Tanaka	4. 巻
2. 論文標題 Asymptotic joint spectra of Cartesian powers of strongly regular graphs and bivariate Charlier-Hermite polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Colloquium Mathematicum	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/cm7724-7-2019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ferdinand Ihringer and Hajime Tanaka	4. 巻 39
2. 論文標題 The independence number of the orthogonality graph in dimension 2^k	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Combinatorica	6. 最初と最後の頁 1425-1428
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00493-019-4134-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jae-Ho Lee and Hajime Tanaka	4. 巻 14
2. 論文標題 Dual polar graphs, a nil-DAHA of rank one, and non-symmetric dual q-Krawtchouk polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 9
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2018.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 2件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 Tight relative t-designs on two shells in hypercubes, and Hahn and Hermite polynomials
3. 学会等名 Special Session on Association Schemes and Related Topics - in Celebration of J.D.H. Smith's 70th Birthday, AMS Fall Central Sectional Meeting（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 The independence number of the orthogonality graph in dimension 2^k
3. 学会等名 Frontiers in Mathematical Science Research Workshop (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 Tight relative t -designs on two shells in hypercubes, and Hahn and Hermite polynomials
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 The Terwilliger algebra with respect to an edge of a bipartite 2-homogeneous distance-regular graph
3. 学会等名 Hakata Workshop Summer Meeting 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 距離正則グラフの Terwilliger 代数の拡張について
3. 学会等名 第63回代数シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 Current progress in the Delsarte theory
3. 学会等名 International Workshop on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 Asymptotic spectral distributions for Cartesian powers of strongly regular graphs and bivariate Charlier-Hermite polynomials
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第6回研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 Association schemes and orthogonal polynomials
3. 学会等名 International Workshop on Bannai-Ito Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人ウェブサイト http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanaka/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----