

令和 2 年 5 月 26 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05164

研究課題名(和文)E-多項式と組合せ論

研究課題名(英文)E-polynomials and combinatorics

研究代表者

大浦 学(Oura, Manabu)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：50343380

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：代数的組合せ論について、幅広く研究を行った。 $dn+$ 型の自己双対重偶符号の種数  $g$  重み多項式について、それらが生成する環が有限生成であることを示し、種数 2 までについては、具体的な生成元を与えた。種数  $g$  符号の重み多項式と、符号から得られる置換群の complete cycle index、E-多項式の Duursma のゼータ多項式について研究を行った。マトロイドの Tutte 多項式の一般種数版を与えた。小関の Jacobi 多項式の一般化を行った。古典的不変式論におけるE-多項式の議論をおこなった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数的組合せ論にとどまらず、モジュラー形式の理論への応用・観点を交えた研究を行った。個々の研究について、様々な観点から見ることができ、今後の研究、発展性も与えたと考えている。特に有限と無限の双方向の研究を行っていることとみることができ、興味深いと思われる。また計算機を本質的に利用しており、この点も強調したい。今後はそれぞれの分野において、更に深く研究を行い、各分野の未解決問題に取り組んだり、新しい研究分野の発見に取り組んでいく。

研究成果の概要(英文)：We studied algebraic combinatorics widely. We consider the ring generated by the  $g$ -th weight enumerators of self-dual and doubly even codes of  $dn+$ . It is finitely generated over the complex numbers  $\mathbb{C}$  and we determined the generators for  $g=1,2$ . We gave the relation between the  $g$ -th weight enumerators and the complete cycle index of the permutation group obtained from codes. We studied Duursma's zeta polynomial of E-polynomials. We defined the  $g$ -th Tutte polynomials and studied its properties. We generalized Ozeki's Jacobi polynomials. We discussed the concept of E-polynomials in classical invariant theory.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：代数的組合せ論 不変式論 モジュラー形式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

自己双対重偶符号の重み多項式は、位数 192 の有限複素鏡映群で不変であることが符号の性質からすぐわかる。有限複素鏡映群の不変式環は、ある自己双対重偶符号の重み多項式たちで生成されることが知られている (Gleason)。さらに自己双対重偶符号の重み多項式の変数にあるタイプのテータ関数を代入することで、モジュラー形式が得られることが知られている (Broue-Enguehard)。これらの定理は、様々な拡張がなされてきた。重み多項式は、種数の概念を取り入れ、多変数化され、モジュラー形式の構成などに応用された (Runge、Duke、小関など)。私はこれらの拡張に取り組んできた。

また、モジュラー形式の典型的な例として知られている Eisenstein 級数の類似として、特別な不変式を E-多項式と呼び、それについての研究も始めていた。

以上の話には、至るところで有限群が現れているのだが、これらに付随する代数的組合せ論の議論も行っていった。

### 2. 研究の目的

上で述べたように、私は、代数的組合せ論の立場から研究に取り組んできた。具体的にはアソシエーションスキーム、Terwilliger 代数、有限群の表現、符号理論、不変式論、モジュラー形式の研究に携わってきた。特に有限群、符号、格子、有限群の不変式、モジュラー形式は有機的に結びついており、双方向の研究が可能である。私の研究はいくつかの分野にまたがっており、それぞれの分野における問題を別の分野において翻訳し、類似の問題として解いたりすることにより、各分野での発展をおこなってきた。本研究では様々な E-多項式的具体例を計算し、その性質を明示する、E-多項式に付随する組合せ論を研究する、E-多項式を、広い範囲の有限群に拡張する、E-多項式をモジュラー形式との関連を研究することなどを目的とする

### 3. 研究の方法

既に述べたように、いくつかの分野にまたがっているため、ある分野の研究を他分野に取り込むことが可能である。代数的組合せ論、モジュラー形式を大きな異なる分野と考えた場合、二つの間を取り持っているのは、テータ関数と不変式論である。それぞれの分野のいいところをこれらでつないでいる。我々の研究においては、有限群が様々な場面で現れるのだが、無限群が現れた場合でも、ある部分群での商をとることにより、有限群をとあり扱うことが多い。それにより、相互の関係が得られる場合が多い。

また、私の研究に計算機は本質的な役割を果たしている。計算機を使うことで、変数が多く (種数が高い) 次数が高い (重さが大きい) 多項式の計算を行う。ある係数のみ必要な場合は、符号理論を利用することもある。

### 4. 研究成果

私の研究で、符号の重み多項式は、重要な役割を果たす。2 元体上の符号の重み多項式は、次で定義される。ここで  $n_i(u)$  はベクトル  $u$  の成分で  $i$  の個数を表す。自己双対重偶符号の種数  $g$  の重み多項式の成す環は、ある有限群の不変式環と一致することが知られている。我々は特別な符号  $dn_+$  をとりあげ、その種数  $g$  の重み多項式の成す環について調べた。 $dn_+$  の種数  $g$  の重み多項式は次の形をしている。

$$W_{dn_+} = \frac{1}{2g} \sum_{\beta, \gamma \in \mathbb{F}_2^g} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_2^g} (-1)^{\alpha \cdot \beta} x_{\alpha + \gamma} x_{\alpha} \right)^{\binom{n}{2}}$$

その重み多項式環は、重み多項式の形から対称式の基本定理を使うことで、複素数体上の環として、有限生成であることがわかった。次に、種数が 1 の時は、位数 192 の複素鏡映群の重み多項式環と一致することがわかった。種数 2 については、まず知られている結果を述べる。自己双対重偶符号の種数 2 の重み多項式の成す環は、ある有限群の不変式環と一致する (Duke, Rung)。 $dn_+$  の種数 2 の重み多項式は、この有限群の不変式であるので、それらが生成する環は、ここでの有限群の不変式環の部分環となっている。そこで、興味があるのは、部分環である  $dn_+$  の種数 2 の重み多項式が生成する環と、不変式環の差である。 $dn_+$  は 8 の倍数である  $n$  に対して、一つずつある。低い重さの所を除くと一致するという事実がわかった (藤井 大浦)。

置換群の cycle index について述べる。 $n$  点上の置換群  $G$  を考えて、 $G$  に含まれる置換の巡回置換の長さを計算する形で定義される。Greene は符号  $C$  から得られる置換群  $G(C)$  を考えて、 $C$  の重み多項式と  $G(C)$  の cycle index の間に成り立つ関係式を与えた。我々は、 $C$  の  $g$  個の直積を考えることにより置換群  $G(C^g)$  を考え、種数  $g$  の重み多項式と  $G(C^g)$  の complete cycle index の関係式を与えた (三枝崎 大浦)。ここで complete cycle index では変数を置換に付随した形で細かく見ることで定義した。

置換群の cycle index について述べる。 $n$  点上の置換群  $G$  を考えて、 $G$  に含まれる置換の巡回置換の長さを計算する形で定義される。Greene は符号  $C$  から得られる置換群  $G(C)$  を考えて、 $C$  の重み多項式と  $G(C)$  の cycle index の間に成り立つ関係式を与えた。我々は、 $C$  の  $g$  個の直積を考えることにより置換群  $G(C^g)$  を考え、種数  $g$  の重み多項式と  $G(C^g)$  の complete cycle index の関係式を与えた (三枝崎 大浦)。ここで complete cycle index では変数を置換に付随した形で細かく見ることで定義した。

小関は、モジュラー形式における Jacobi 形式との関係に示唆され、符号の Jacobi 多項式を定義し、その性質を与えた。

$$\sum_{u_1, \dots, u_g \in \mathbb{C}} \left( \prod_{1 \leq i \leq g} X_i^{wt(u_i)} \right) \left( \prod_{2 \leq l \leq g+1} \prod_{1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq g+1} X_{k_1 \dots k_l}^{wt(u_{k_1} \circ \dots \circ u_{k_l})} \right)$$

我々は小関の Jacobi 多項式の一般種数の定義を与え、その基本的性質を与えた(本間 今村大浦) その論文では、種数  $g$  の重み多項式、

intersection enumerator、Jacobi 多項式を関連づけて論じている。非斉次の Jacobi 多項式の定義は複雑であるが、斉次の Jacobi 多項式は非常にシンプルな形であることがわかった。Reference vector  $v$  に対して、次のような式になる。ここで、 $n_a$  であるが、 $a=(u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{gi}, v_i)$  なる  $i$  の個

$$\sum_{u_1, \dots, u_g \in \mathbb{C}} \prod_{a \in \mathbb{F}_2^{g+1}} y_a^{n_a(u_1, \dots, u_g, v)}$$

数を表す。非斉次、斉次、双方の Jacobi 多項式の MacWilliams 恒等式を与えた(本間 岡部大浦) 斉次 Jacobi 多項式を考えると、MacWilliams 恒等式が得られ、不変式論的な議論ができる。これは現在進行形の研究である。

Matroid  $M=(E, I)$  に対して、Tutte 多項式を考える。我々は、種数  $g$  の Tutte 多項式を定義し、matroid  $M$  の特徴付けについて研究をおこなった。種数をあげることによってマトロイドを細かく見ることができるようになった。特殊なマトロイドについては、特徴づける種数を明示することもできた(三枝崎 大浦 佐久間 篠原)。

Duursma は符号のゼータ多項式概念を定義した。三枝崎は Type II 符号に関連して、そのゼータ多項式について研究を行っていた。我々は、Type I, III, IV 符号に付随する E-多項式を考えた。それらの明示的な式を与えた。それらが、リーマン仮説の類似を満たすこと、係数が  $p$ -integral であることなどを示した(三枝崎 大浦)。

有限群とある部分群のペアを考慮して、E-多項式を定義した。この考えを古典的不変式論へ応用を行った。そこで鍵となるのは次の考え方である。多項式  $f(x, u)$  において、 $x_2=1$  とした  $x_1$  の多項式の根を  $e_1, \dots, e_{(2g+2)}$  としたとき、各  $e_i$  は各積において  $r$  回現れ、全体は  $e_1, \dots, e_{(2g+2)}$  の対称式となっているとき、不変式になると補題がキーポイントである。これを  $(e_1 - e_2)(e_3 - e_4) \dots (e_{(2g+1)} - e_{(2g+2)})$  に適用する

$$f(x, u) = \sum_i u_i \binom{2g+2}{i} x_1^{2g+2-i} x_2^i$$

$$u_0^r \sum (e_i - e_j)(e_k - e_l) \dots$$

ことで E-多項式を得る。そして、これらの式で生成される部分環を考えるのである。この部分環は、複素数体上有限生成であることが示され、種数 1 と 2 の場合は、古典的不変式環の偶数重さの部分と一致する。種数 3 の場合は、偶数重さの部分環より真に小さくなることがわかった(投稿中、Hamid-小須田 大浦)。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M.Fujii, M.Oura	4. 巻 42
2. 論文標題 Ring of the weight enumerators of $d_n^+$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tsukuba Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 53-63
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Miezaki, M.Oura	4. 巻 87
2. 論文標題 On the cycle index and the weight enumerator	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Des. Codes Cryptogr.	6. 最初と最後の頁 1237-1242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10623-018-0518-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Miezaki, M.Oura, T.Sakuma, H.Shinohara	4. 巻 95
2. 論文標題 A generalization of the Tutte polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 111-113
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi:10.3792/pjaa.95.111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Miezaki, M.Oura	4. 巻 16
2. 論文標題 On Eisenstein polynomials and zeta polynomials II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Int. J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 207-218
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi.org/10.1142/S1793042120500116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 大浦 学
2. 発表標題 On weight enumerators
3. 学会等名 研究集会「組合せ論的符号理論」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大浦 学
2. 発表標題 Coding theory and some finite groups
3. 学会等名 Meeting of number theory, ring theory, Hopf algebra theory and related topics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大浦 学
2. 発表標題 Symmetric group and classical invariant theory
3. 学会等名 International Symposium on Computational Science 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三枝崎 剛
2. 発表標題 完全巡回指数の導入
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三枝崎 剛
2. 発表標題 タット多項式の高種数化
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大浦 学
2. 発表標題 Ring of the weight enumerators of triply even codes
3. 学会等名 5th Biennial International Group Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

大浦 学 <a href="http://sphere.w3.kanazawa-u.ac.jp/">http://sphere.w3.kanazawa-u.ac.jp/</a> <a href="http://sphere.w3.kanazawa-u.ac.jp/">http://sphere.w3.kanazawa-u.ac.jp/</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	小須田 雅  (Kosuda Masashi)  (40291554)	山梨大学・大学院総合研究部・教授    (13501)	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	三枝崎 剛  (Miezaki Tsuyoshi)  (60584068)	琉球大学・教育学部・准教授       (18001)	