

令和 3 年 6 月 11 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05168

研究課題名(和文) 等分多項式と直交多項式の数論

研究課題名(英文) Arithmetic of division polynomials and orthogonal polynomials

研究代表者

山岸 正和 (Yamagishi, Masakazu)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40270996

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：代数的整数論において等分多項式は重要な研究対象である。一方、グラフ理論や組合せ論において直交多項式がしばしば現れ、特にチェビシェフ多項式は幅広い応用を持つ。チェビシェフ多項式を等分多項式と見ることにより、数論的手法でその性質を調べ、各種問題に応用することが可能となる。本研究ではこの観点を他の等分多項式に適用した。主な成果はヤコビ楕円関数の等分多項式の終結式の決定と、形式群の等分多項式の応用である。また当初予期していなかった成果として、チェビシェフ多項式を利用して符号理論のいくつかの問題に解答を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

各種多項式系列の終結式は古くから計算され、代数的整数論を始め各分野で応用されている。最近では数論力学系に関連して、ワイエルシュトラス楕円関数の等分多項式の終結式が計算された(Harry Schmidt, 2015)。その系列にヤコビ楕円関数の等分多項式を加えることができたことは学術的に意義があるといえる。虚2次体の整数環の単生性への応用が期待できる。符号理論に関する本研究の成果は理論的なものであり、実在の線形符号に直接関わるものではないが、将来的には符号のゼータ関数について新しい知見を与えることが期待される。

研究成果の概要(英文)：Division polynomials are important subjects in algebraic number theory. On the other hand, orthogonal polynomials often appear in graph theory and in combinatorics; in particular, Chebyshev polynomials have wide-ranging applications. By regarding Chebyshev polynomials as division polynomials, we are able to investigate their properties by arithmetic methods and to apply Chebyshev polynomials to various mathematical problems. In this study, we applied this point of view to other kinds of division polynomials. The main results are the determination of resultants of division polynomials of Jacobi elliptic functions, and an application of division polynomials of formal groups. Also, as initially unexpected results, we gave answers to some problems in coding theory by using Chebyshev polynomials.

研究分野：代数的整数論

キーワード：等分多項式 チェビシェフ多項式 ヤコビ楕円関数 終結式と判別式 線形符号 重み多項式 形式群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1)研究代表者と研究分担者は「グラフのラプラシアンの数論的研究」(基盤研究(C)2011~2015年)において各種グラフ系列のラプラシアンの数論的振舞を調べ、またその研究の過程で培った各種多項式(等分多項式、直交多項式)に関する知見を活かし、数論や離散数学への応用研究もいくつか行った。

(2)2014年にDavid A. CoxとTrevor Hydeは円分方程式とレムニスケート等分方程式の類似(古典的な題材)を現代的視点から扱った引用文献において、レムニスケートの等分に付随して得られる多項式(ヤコビ楕円関数の等分多項式の特別な場合)とチェビシェフ多項式の類似を詳しく論じている。研究代表者は2014~2015年に山縣幸司氏(当時大学院博士前期課程在学)と共同で、これらのヤコビ楕円関数の等分多項式の終結式および判別式の数値計算を行い、結果を予想した。

2. 研究の目的

(1)研究代表者がこれまで行なってきたチェビシェフ多項式の数論的研究の二つの方向への拡張・一般化をめざす。一つ目の対象は楕円関数・楕円曲線・形式群などに由来する各種等分多項式であり、二つ目の対象はゲーゲンバウエル多項式・ヤコビ多項式を始めとする各種古典的直交多項式である。主としてチェビシェフ多項式との類似の観点から、これらの多項式を題材として未知の数論的性質を明らかにし、また数論的応用を試みる。

(2)上記のいわば「性質のよい特殊多項式」を手がかりとして、岩澤理論・結び目理論・グラフ理論・組み合わせ論・特殊関数論への応用をめざす。

3. 研究の方法

関連する先行研究について情報収集と資料収集を行い、重要な文献を講読する。解決すべき問題の定式化を試み、また数式処理ソフトウェア Mathematica による数値計算も併用して精密な結果を予想する。主に研究代表者が、研究分担者および国内の数論研究者の助言も受け、予想の証明に取り組む。証明ができれば中間発表を行い、また論文にまとめて学術雑誌に投稿する。

4. 研究成果

研究代表者

(1)ヤコビ楕円関数の4種類の等分多項式 A_n, B_n, C_n, D_n に対し、次数 n を固定した上で2種類の多項式 X_n と Y_n との終結式の明示的公式を与え、その応用として判別式の明示的公式も与えた。この結果を論文としてまとめ学術雑誌に発表した。また等分多項式の終結式・判別式に関する主に研究代表者による最近の結果をより広い観点から整理し、研究集会で成果発表を行った。以上は山縣幸司氏との共同研究である。今後の課題として、多項式の種類 X を固定した上で次数の異なる X_m と X_n との終結式の明示的公式が望まれる。もしこれが得られれば、引用文献への貢献(記述の簡易化)が期待できる。

(2)リュカ数列の合同式の別証明を得た。合同式自体は既知であり、初等的だが見通しの悪い長い証明、 p 進的な手法による別証明、形式群の理論を用いた別証明が知られていた。本研究ではディクソン多項式(チェビシェフ多項式の一般化)の基本的性質を利用した初等的かつ見通しの良い短い証明を与えた。この結果は形式群に由来する等分多項式の研究の副産物として得られたもので、有理形式群の等分多項式が本質的にディクソン多項式であることがその理論的背景にある。また本田平氏による形式群の L 関数のある例とも関係がある。この結果は学術雑誌に論文として発表し、また学会で成果発表を行った。

(3)パスグラフのデカルト積のラプラシアンから定まる二元線形符号について、頂点数が奇数の場合に最小距離が1であることを示した。また頂点数が偶数の場合に最小距離に関する予想を定式化した。ラプラシアンの全単射性の考察においてチェビシェフ多項式が効果的な役割を果たした。この結果は学術雑誌に論文として発表した。

(4)自己双対重偶符号の重み多項式と似た性質を持つ一般の(係数が非負整数と限らない)二変数齊次多項式を形式的重み(formal weight enumerator)多項式という。形式的重み多項式は小関道夫氏により初めて導入され保型形式への応用が知られている。また近年知念宏司氏により符号のゼータ関数の観点から組織的に研究されている(引用文献)。研究代表者は知念氏の結果にヒントを得、チェビシェフ多項式との深い関係を明らかにした。この結果は学術雑誌に論文として発表し、また学会で成果発表を行った。

(5)(4)の精密化を得た。具体的には、知念氏の発見した3系列の formal weight enumerator のゼータ多項式の計算に成功し、またゼータ多項式の零点の位置について十分な情報が得られた。特にリーマン予想類似の成立に対する簡明な判定法を与えた。以上の結果の定式化や証明に際しては、第 1,2,3,4 種のチェビシェフ多項式を対等に扱うという本研究の姿勢が非常に役立った。結果を論文にまとめ、学術雑誌に投稿中である。

研究分担者

(6)チェビシェフ多項式と関連の深い Joukowski 写像の反復から得られる代数体の2進 Lie 拡大に対し岩澤理論的考察を行い、成果を学術雑誌に発表した。

引用文献

Chinen, Koji. *Divisible formal weight enumerators and extremal polynomials not satisfying the Riemann hypothesis*. Discrete Math. **342** (2019), no. 12, 111601, 12 pp.

Chinen, Koji. *Extremal invariant polynomials not satisfying the Riemann hypothesis*. Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **30** (2019), no. 4, 275-284.

Cox, David A.; Hyde, Trevor. *The Galois theory of the lemniscate*. J. Number Theory **135** (2014), 43-59.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 YAMAGISHI Masakazu	4. 巻 -
2. 論文標題 Formal weight enumerators and Chebyshev polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00200-020-00469-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 MIZUSAWA Yasushi, YAMAMOTO Kota	4. 巻 -
2. 論文標題 On 2-adic Lie Iterated Extensions of Number Fields Arising from a Joukowski Map	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 YAMAGISHI Masakazu	4. 巻 57
2. 論文標題 A Short Proof of Congruences for Lucas Sequences	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Fibonacci Quarterly	6. 最初と最後の頁 260-264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 HAYATA Yuki, YAMAGISHI Masakazu	4. 巻 12
2. 論文標題 On weight-one solvable configurations of the Lights Out puzzle	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Involve, a Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 713 ~ 720
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/involve.2019.12.713	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 YAMAGATA Koji, YAMAGISHI Masakazu	4. 巻 186
2. 論文標題 Resultants and discriminants of the multiplication polynomials of Jacobi elliptic functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 147 ~ 161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2017.09.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件(うち招待講演 1件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 山岸正和
2. 発表標題 有理形式群について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山岸正和
2. 発表標題 Formal weight enumerator とチェビシェフ多項式
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山縣幸司, 山岸正和
2. 発表標題 等分多項式の終結式と判別式について
3. 学会等名 代数的整数論研究集会(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	水澤 靖 (Mizusawa Yasushi) (60453817)	名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授 (13903)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------