様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 ３０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０５１６９

研究課題名（和文）概均質ベクトル空間の整数論

研究課題名（英文）Number theory of prehomogeneous vector spaces

研究代表者
雪江　明彦（Yukie, Akihiko）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：２０３１２５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 2つの概均質ベクトル空間の有理軌道の解釈を決定した。(2) 分裂でない tri-Hermitain 形式の空間に関連する密度定理を証明した。これは3次体を固定し2次体を動かすとき，その合成体と2次体の相対の類数と単数基準の積の密度を決定した結果である。(3) GIT stratification の一般論をコンピューターも使い，4つの場合に適用し，そのうち3つの場合には stratification とそれにより全ての有理軌道を決定した。もう1つの場合もパラメータ集合は決定済みである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
概均質ベクトル空間は不変式論と解析的整数論が交錯する分野で特にそれから得られる密度定理は解析的整数論の主要な目的である。そのためには有理軌道で問題の意味を解釈することが必要であり，方法としてはベクトル空間の stratication を決定することが不可欠である。これらのことを本研究ではいくつかの場合に実現し，実際に新しい密度定理を証明することに成功したことは意義がある。

研究成果の概要（英文）：(1) I determined the interpretation of two prehomogeneous vector spaces. (2) I proved a density theorem related to the space of non-split tri-Hermitain forms. For a fixed cubic field and quadratic fields, the composite field is a sextic field. I determined the density of relative hR (class number times the regulator) of this composite field and the quadratic field. (3) I applied the general theory of GIT stratification to 4 concrete cases and determined the stratification and all rational orbits for 3 cases. For the remaining case I determined the parameter set of vectors.

研究分野：不変式論，解析的整数論

キーワード：概均質ベクトル空間　代数群　不変式論　密度定理

様 式 C − 9、F − 19 − 1、Z − 19（共通）

1. 研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間に関連する研究の重要な話題として有理軌道の解釈，大域ゼータ関数の極の決定，局所ゼータ関数の一様評価，密度定理などがある．いくつかの重要な場合にこれらは決定されたが，まだまだ未決定な場合が残っている．こういった課題についての研究が求められていた．

2. 研究の目的

1. で述べたように概均質ベクトル空間に関連する未解決な問題について研究するのが目的であった．特に以下の問題について研究するのが目的であった．

(1) 概均質ベクトル空間の有理軌道をより多くの場合に決定する．

(2) 未知の密度定理の証明．

(3) (1) は主に一般点における軌道の考察であるが，作用が悪い点 (不安定点) の構造の決定は大域，局所ゼータ関数両方に有益であり，それを多くの場合に決定する．

3. 研究の方法

(1) 一般的における有理軌道についてはガロアコホモロジーによる標準的なアプローチがあるので，それにしたがって研究を行う．

(2) 今回は大域ゼータ関数に関する過去の結果を使ったので，大域ゼータ関数に関する研究は行わないが，局所ゼータ関数の一様評価は 1 つの場合に行う (4. 参照)．また，1960 年代の小野の結果による玉河数のコホモロジー的な解釈と局所密度の計算により密度定理を証明する．

(3) 過去指導した学生 (田嶋和明) との共同研究を行い，幾何学的不変式論を使った不安定点の構造の決定を田嶋氏の博士論文の結果を基に，具体的な概均質ベクトル空間に対して適用する．

4. 研究成果

1. 概均質ベクトル空間の有理軌道を 6 次元 primitive trivector の場合に決定した．
2. non-split tri-Hermitian forms に関連する密度定理の証明．
3. GIT stratification の実際の 概均質ベクトル空間に対する決定．

1. 以前アクセプトされていた, 例外ジョルダン代数の対の空間の有理軌道に関する論文が J. Number Theory から出版された．これは過去に指導した院生である加藤遼との共同研究である．

また, 次元 6 の primitive trivector の空間の有理軌道の解釈を決定した論文が Tohoku J. から出版された．少し説明する．$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}(6)$, $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_6 \in \mathrm{Aff}^6$ を標準ベクトルとするとき, $e_{i_1 i_2 i_3} = e_{i_1} \wedge \mathbb{e}_{i_2} \wedge \mathbb{e}_{i_3}$ などとする．GSp(6) は $S = e_{14} + e_{25} + e_{36}$ に対して定義されているとする．$U = \wedge^3 \mathrm{Aff}^6$ は 20 次元のベクトル空間で $W = \{S \wedge v \mid v \in \mathrm{Aff}^6\}$ は 6 次元の部分空間である．U には G が作用し W は不変部分空間なので，$V = U/W$ は G の 14 次元の表現で概均質ベクトル空間である．基礎体 k は標数

が $2,3$ でない体とする．このとき次の定理がこの場合の主定理である．Ex_n を k の n 次以下の分離拡大のガロア閉包となっている体の同型類とする．$w=e_{123}+e_{456}$ とする．k_1/k が 2 次拡大なら $\mathrm{SH}_3(k_1)$ は k_1 に係数を持つ 3 次エルミート行列で行列式が 1 であるものの同値類とする．

定理: 写像 $\gamma_V : G_k\backslash V_k^{\mathrm{ss}} \to \mathrm{Ex}/2$ があり次の (1)–(4) が成り立つ．

(1) $\gamma_V^{-1}(k)=G_k\cdot w$.

(2) $G_w^\circ \cong \mathrm{GL}(1)\times \mathrm{SL}(3)$, $G_w/G_w^\circ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) k_1/k が 2 次拡大なら, $\gamma_V^{-1}(k_1)$ は $(\mathrm{SL}(3)_{k_1}\rtimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))\backslash \mathrm{SH}_3(k_1)$ と 1 対 1 に対応する．

(4) $G\cdot x\in\gamma_V^{-1}(k_1)$ が $Q\in \mathrm{SH}_3(k_1)$ に対応するなら，$G_x^\circ\cong \mathrm{GL}(1)\times \mathrm{SU}(k_1,Q)$.

次に 2 の結果について説明する．簡単のために基礎体は $\mathbb{Q}$ とする．3 次体 $\widetilde{k}$ を固定する．$\widetilde{k}/\mathbb{Q}$ は 3 で不分岐とする．p を素数とする．$\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p\cong\mathbb{Q}_p\oplus\mathbb{Q}_p\oplus\mathbb{Q}_p$ なら $\widetilde{k}$ の p でのタイプは (triv)，$\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p\cong\widetilde{k}_p\oplus\mathbb{Q}_p$, $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ 2 次拡大なら $\widetilde{k}$ の p でのタイプは (quad)，$\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$ が体なら $\widetilde{k}_p=\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$ とおき $\widetilde{k}$ の p でのタイプは (cubic) とする．$\widetilde{k}$ の p でのタイプが (quad) で $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ が分岐なら相対判別式 $\Delta_{\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p}$ のオーダーを δ_p とする．

素数 p, に対し定数 E_p を以下で定める．($\lfloor x\rfloor$ は n 以下の最大の整数).

Case	E_p
(triv)	$(1-p^{-2})(1-3p^{-3}+2p^{-4}+p^{-5}-p^{-6})$
(quad) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ 不分岐	$(1-p^{-4})(1-p^{-2}-p^{-3}+p^{-4})$
(quad) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ 分岐	$(1-p^{-1})(1-p^{-2})(1+p^{-2}-p^{-3}+p^{-2\delta_p-2\lfloor\delta_p/2\rfloor-1})$
(cubic) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ 不分岐	$1-p^{-2}-p^{-4}+p^{-5}-p^{-7}+p^{-8}$
(cubic) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ 分岐	$(1-p^{-1})(1-p^{-4})$

$\widetilde{k}$ の $p\neq 2$ でのタイプが (quad) で $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ が分岐なら $\delta_p=1$ で $E_p=(1-p^{-1})(1-p^{-4})$.

無限素点での定数を以下のように定義する．

$$c_\infty(\widetilde{k})(+)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^3,\\ \frac{1}{4\pi} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{C},\end{cases}\qquad c_\infty(\widetilde{k})(-)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi^2} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^3,\\ \frac{1}{4\pi} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}.\end{cases}$$

2 次体 F に対し $L=\widetilde{k}\cdot F$, $T(F)=\{x\in \mathrm{R}_{L/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}(1)\mid \mathrm{N}_{L/F}(x)\in\mathrm{GL}(1)\}$ とする．

$$M(F)=\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q},T(F))\to \mathrm{H}^1(\mathbb{R},T(F))\times\prod_p \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p,T(F)))$$

と定義するとこれは Tate-Shafarevich 群の類似である．$i(F)=\#M(F)$ と定義すると $i(F)=3^{r(F)}$ で $r(F)=0,1$ となることが示せる．また $\widetilde{k}/\mathbb{Q}$ が正規拡大でなければ $r(F)=0$ である．

Δ_F, h_F, R_F, etc., などは判別式, 類数，単数基準などとする．次の定理がこの場合の主結果である．

定理:

$$\begin{aligned}&\lim_{X\to\infty} X^{-2} \sum_{[F:\mathbb{Q}]=2, 0<\pm\Delta_F<X} \frac{h_{\widetilde{k}\cdot F} R_{\widetilde{k}\cdot F}}{h_F R_F}(1+i(F)^{-1}) \\ &= |\Delta_{\widetilde{k}}|^{\frac{1}{2}} h_{\widetilde{k}} R_{\widetilde{k}} c_\infty(\widetilde{k})(\pm)\zeta_{\widetilde{k}}(2)\prod_p E_p.\end{aligned}$$

3. について説明する．

これは田嶋和明との共同研究である．(G,V) が概均質ベクトル空間であるとき，知りたいのは V の一般点に関する情報だが，ゼータ関数などを調べるには G の作用が悪いところの構造を知る必要がある．基礎体が $\mathbb{C}$ のときは (G,V) の軌道分解は知られているが，数論的な状況では有理性が問題になる．また素数 p を法として考えることも多いので，標数も任意標数での結果が望ましい．また解析的な応用としては悪い点の集合が帰納的に有理的にファイバー積の構造を持っていることがわかるのが望ましい．GIT stratificaion はそういったことを可能にする理論である．詳しくは述べないが，極大トーラスの作用を対角化しておいたとき，座標の weight の有限集合の凸閉包の原点から一番近い点をパラメータとして stratification が定まり，strata の帰納的構造も保証されている．

この一般論は過去の論文で決定しているが，それをいくつかの大きい概均質ベクトル空間に対して決定した．GIT stratification のパラメータ集合 $\mathfrak{B}$ は以下の場合に決定した．

(1) $G=\mathrm{GL}_3\times\mathrm{GL}_3\times\mathrm{GL}_2$, $V=\mathrm{Aff}^3\otimes\mathrm{Aff}^3\otimes\mathrm{Aff}^2$.
(2) $G=\mathrm{GL}_6\times\mathrm{GL}_2$, $V=\wedge^2\mathrm{Aff}^6\otimes\mathrm{Aff}^2$.
(3) $G=\mathrm{GL}_5\times\mathrm{GL}_4$, $V=\wedge^2\mathrm{Aff}^5\otimes\mathrm{Aff}^4$.
(4) $G=\mathrm{GL}_8$, $V=\wedge^3\mathrm{Aff}^8$.

これには計算機による激しい計算を要した．$\mathfrak{B}$ の元 β に対し，stratum S_β が定まるが，$S_\beta=\emptyset$ もありうる．(1), (2) の場合には，$S_\beta\neq\emptyset$ である β を決定し，k が完全体の場合に全ての β に対し有理軌道 $G_k\backslash S_{\beta\,k}$ を決定した．

(1) に関する結果は次の定理である．

定理: 概均質ベクトル空間 (1) には 16 個の空集合でない strata S_β がある．また，1 つの stratum S_{β_0} を除き，$G_k\backslash S_{\beta\,k}$ は 1 点よりなり，$G_k\backslash S_{\beta_0\,k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 に対応する．

(2) に関する結果は次の定理である．

定理: 概均質ベクトル空間 (1) には 13 個の空集合でない strata S_β がある．また，1 つの stratum S_{β_0} を除き，$G_k\backslash S_{\beta\,k}$ は 1 点よりなり，$G_k\backslash S_{\beta_0\,k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 に対応する．

(3) に関する結果を述べる前にいくつか定義する．完全体 k の標数は 2 でないとする．

定義: (1) $\mathrm{Prg}_2(k)$ を PGL_2 の k-form の k 同型類の集合とする．

(2) $\mathrm{QF}_4(k)$ を $\mathrm{GO}(Q)^\circ$ (Q は 4 変数 2 次形式) という形をした代数群の k 同型類の集合，$\mathrm{IQF}_4(k) \subset \mathrm{QF}_4(k)$ をその部分集合で分裂する $\mathrm{GO}(Q_0)^\circ$ の inner form になっているものの集合とする．

(3) に関する結果は次の定理である．

定理: (1) 概均質ベクトル空間 (3) には 61 の空集合でない strata S_β がある．

(2) $S_\beta \neq \emptyset$ なら $G_k\backslash S_{\beta\,k}$ は (i) 1 点 (SP と省略) (ii) $\mathrm{Ex}_2(k)$ (iii) $\mathrm{Ex}_3(k)$ (iv) $\mathrm{Prg}_2(k)$ (v) $\mathrm{IQF}_4(k)$ のどれかになる．また (i)–(v) になる S_β の数は次の通りになる．

タイプ	SP	$\mathrm{Ex}_2(k)$	$\mathrm{Ex}_3(k)$	$\mathrm{Prg}_2(k)$	$\mathrm{IQF}_4(k)$
S_β の数	43	12	3	2	1

(4) に関しては考察はまだ終わっていないが，近いうちに完成することが期待される．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Tajima, Kazuaki and Yukie, Akihiko	４．巻 to appear
２．論文標題 On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces II	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Tsukuba J. Math.	６．最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yukie, Akihiko	４．巻 162
２．論文標題 On the density theorem related to the space of non-split　tri-Hermitian forms II	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Manuscripta Math.	６．最初と最後の頁 221--239
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-019-01116-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Akihiko Yukie	４．巻 71
２．論文標題 Rational orbits of primitive trivectors in dimension six	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Tohoku Math. J.	６．最初と最後の頁 35-52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj/1552100441	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Akihiko Yukie	４．巻 194
２．論文標題 On the density theorem related to the space of non-split tri-Hermitian forms I	５．発行年 2019年
３．雑誌名 J. Number Theory	６．最初と最後の頁 117-169
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi.org/10.1016/j.jnt.2018.07.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Ryo Kato and Akihiko Yukie	4．巻 189
2．論文標題 Rational orbits of the space of pairs of exceptional Jordan algebras	5．発行年 2018年
3．雑誌名 J. Number Theory	6．最初と最後の頁 304--352
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2017.12.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 A. Yukie	4．巻 to appear
2．論文標題 Rational orbits of prehomogeneous vector spaces	5．発行年 2020年
3．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6．最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 A. Yukie
2．発表標題 On the density theorem related to the space of non-split tri-Hermitian forms
3．学会等名 保型形式とL関数の解析的，幾何的，p進的研究（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 A. Yukie
2．発表標題 On the density theorem related to the space of non-split tri-Hermitian forms
3．学会等名 6th Kyoto conference on automorphic forms（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 A. Yukie
2．発表標題 On the local density of prehomoegenous vector spaces
3．学会等名 4th Kyoto conference on automorphic forms（招待講演）
4．発表年 2017年～2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考