

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05172

研究課題名（和文）簡約リー群の表現の分岐則を梃子とした実解析的保型形式の構成的研究

研究課題名（英文）A constructive study of real analytic automorphic forms using the branching rule of representations of reductive Lie groups as leverage

研究代表者

森山 知則（MORIYAMA, Tomonori）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80384171

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：実解析的な保型形式の実例の構成は、多くの方法が知られているが正則な保型形式と比べて精密な研究に耐えるものは少ない。簡約リー群の表現の分岐則を利用して、この状況を是正することが望まれる。そのための重要な第一段階として、階数2の実斜交群上の一般化Whittaker函数について、一般主系列表現を生成する場合に、2重逆メラン変換による積分表示与えることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回得られた一般化Whittaker函数の積分表示式は、パラメータに関する挙動が調べやすく保型L函数への応用上便利であろう。また、多くの困難が予想される一般化Whittaker函数を用いたポアンカレ級数を用いた実解析的ジエゲル保型形式の構成にも役立てられると思われる。

研究成果の概要（英文）：Although there are many known methods of constructing concrete examples of real analytic automorphic forms, few of them stand up to precise study compared to holomorphic automorphic forms. The purpose of this project was to remedy this situation by using the branching rules of representations of reductive Lie groups. As a first and important step, we succeeded in constructing an integral expression for generalized Whittaker functions on real symplectic group of rank two, which generate certain generalized principal series representations. This integral expression is given by a double inverse Mellin transform.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 表現論 テータ級数 フーリエ係数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

実解析的な保型形式の実例の構成は、多くの方法が知られている。しかしながら、正則な保型形式と比べて精密な研究に耐えるものは少ない。他方で逆定理等を用いた「関手性」の確立による抽象的なレベルでの存在定理やその応用は花盛りの感があった。この状況に、より具体的な構成法が加われば、実解析的な保型形式の研究が促進されるとの期待があった。

## 2. 研究の目的

「レベル」をコントロールできる形、もしくは具体的な「フーリエ係数」が計算可能な形で実解析的な保型形式を構成することが大きな目的である。Eisenstein 級数やテータ級数、などの従来からある方法を、「レベル」をコントロールできる形、もしくは具体的な「フーリエ係数」が計算可能な形に精密化する。具体的には次のいくつかの方法を併用して考える。

まず、大きな群  $G$  上の Eisenstein 級数などの保型形式と小さな群  $H$  に制限したものと  $H$  上の Eisenstein 級数の差を取ることで、群  $H$  上のカスプ形式を得るという手法が、正則保型形式については用いられている。この手法の実解析的な類似の実例を与えることも目的となる。

更に、また、調和多項式から構成されるテータ級数についても、Hecke 作用素の振る舞いやレベルのコントロールを行うためにはテスト函数の適切な選択が重要になる。ここでは有限群の表現論を利用した絞り込み（すなわち不変調和多項式の利用）の有効性についても調べる。

まず、Rankin=Cohen 型作用素の実解析的な類似の構成も上記の大きな目的を実現するための重要な手段となりうる。具体的には次のいくつかの方法を併用して考える。

## 3. 研究の方法

(1) 2 次の斜交群の保型形式である 2 次の (実解析的) ジーゲル保型形式のフーリエ展開の理論の整備をさらに進める。特に、フーリエ展開の記述の要となる一般化 Whittaker 函数の公式を指標パラメータに関する依存性が分かりやすいように書き換えること。さらに、この整備された理論を用いて、テータ級数などの具体的に定義された保型形式のフーリエ展開を調べる。従来の方法ではテスト函数を具体的に指定しない、いわば存在定理的な結果にとどまっているものも散見されるのでこの辺りの精密化も考える。

(2) 調和多項式から構成されるテータ級数による保型形式の構成においては、テスト函数の選択には自由度が大きい。すなわち、テスト函数からテータ級数を与える線形写像は大きな核を持つ。ここで、レベルのコントロールやヘッケ理論の観点からは、テスト函数の適切な選択が重要になると思われる。このあたりのことについて、感触を得るために、有限群の不変式を用いて楕円保型形式の場合を考察する。

## 4. 研究成果

(1) 上述の 2 次の実斜交群上の一般化 Whittaker 函数の公式の書き換えが、ヤコビ型放物部分群から誘導された一般化主系列表現を生成する場合に達成された。この書き換えにおいては、一般化 Whittaker 函数の「動径成分」である 2 次元トーラスが満たす微分方程式を部分メラン変換がガウスの超幾何微分方程式を満たすという観察が鍵となった。この観察に至るまで、ずいぶん遠回りな計算を強いられたが、ともかく最終的な公式（それは 2 重メラン逆変換による積分表示式である）が得られたのは満足すべき成果であった。

また、この公式を「大きな」離散系列を生成する一般化 Whittaker 函数に拡張するために、表現のパラメータをずらす recursive な公式も得ることができた。この、recursive な公式から利用すると、一般化主系列表現の場合と同様な 2 重メラン逆変換による積分表示式が得られると期待される。さらに、副産物として、一般化 Whittaker 函数からポアンカレ級数としての保型形式の構成という別の問題へ応用の可能性も見えてきた。

しかしながら、当初の目的である「フーリエ係数」込みで実解析的な保型形式を構成には至らなかったのは残念である。

(2) 調和多項式を利用したテータ級数の構成に用いられるテスト函数に関しては、 $A_n$  型カルタン行列の直交群の場合にデータの収集を、指導する博士前期の院生の協力のもと行った。特

に第一フーリエ級数によってテスト函数（不変調和多項式）の正規化を行いそのノルム計算を行った。その結果、顕著な法則性が見られた。これは従来得られていた  $E_n$  型 ( $n=6,7,8$ ) のカルタン行列に関する直交群についてはそれほどはっきりとは見られなかった顕著な興味ある現象であった。この法則性の意味するところの解明には至っていない。おそらく、ヘッケ作用素を含めた考察、たとえば Rallis 内積公式を利用した議論が有用との感触があるが、さらに調査が必要である。

なお、本研究課題との直接の関係は不明であるが、不変調和多項式を用いたテータ級数の構成に関しては、組み合わせ論の研究者からも興味を持たれていることがその方面との議論から知ることができた。

(3) 研究開始時に構想したいくつかの手法、特に Rankin=Cohen 型作用素の類似の構成については、上記 (1) (2) に思いのほか時間を要し、情報収集のレベルにとどまった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Moriyama, Tomonori	4. 巻 2136
2. 論文標題 ON AN AVERAGE OF CRITICAL VALUES OF RANKIN-SELBERG $L$ -FUNCTIONS	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 95-100
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 森山知則	4. 巻 2100
2. 論文標題 THETA SERIES CONSTRUCTED FROM INVARIANT $E_8$ -HARMONIC POLYNOMIALS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 43-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 2件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 森山 知則
2. 発表標題 Theta series associated with invariant harmonic polynomials- examples and future problems-
3. 学会等名 幾何学における代数的・組み合わせ論的視点 第3回：不変式・保型形式と幾何学（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森山知則
2. 発表標題 Theta series constructed from invariant harmonic polynomials
3. 学会等名 5th Kyoto conference on automorphic forms（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 源嶋孝太, 森山知則
2. 発表標題 On an average of critical values of Rankin-Selberg L-functions.
3. 学会等名 保型形式, 保型表現とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森山知則
2. 発表標題 Theta series constructed from invariant harmonic polynomials
3. 学会等名 RIMS 共同研究(公開型)「保型形式の解析的・数論的研究」
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------