

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 7 月 6 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05174

研究課題名(和文) 局所体上の曲線に対する類体論とその応用

研究課題名(英文) Applications of class field theory for curves over local fields

研究代表者

平之内 俊郎 (Hiranouchi, Toshiro)

九州工業大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：30532551

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は主に次の4つである。1、まず(正標数も含む)局所体上の開曲線に関する類体論を完成させた。2、代数体上の楕円曲線に付随する類数の下限を楕円曲線の Mordell-Weil 群の階数で与えた。3、 $p$ 進体上の曲線で Jacobi 多様体が good ordinary reduction を持つ場合に、その曲線の「類群」を具体的に計算した。4、 $p$ 進体上のふたつの楕円曲線に付随する染川  $K$  群が  $p$ -divisible になる条件について考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所体上の曲線に対する類体論そのものは1980年代に完成していたが、付随する「類群」の計算についての結果はこれまでそれほど多くはなかった。今回の研究成果により、こうした「類群」を幾つかの場合は具体的に計算することが分かった。将来的な発展の余地も大きいと思われる。

研究成果の概要(英文)：The results in this project are mainly the following four: 1. First, I completed the class theory on open curves over local fields (which may has positive characteristic). 2. The lower bound of the class number associated with an elliptic curve over a number field is given by the rank of the Mordell-Weil group of the elliptic curve. 3. For a curve over a  $p$ -adic field, when the associated Jacobian variety has a good ordinary reduction, we obtain an explicit computation of the "class group" of the curve. 4. We discussed conditions under which the Somekawa  $K$ -group associated with two elliptic curves on a  $p$ -adic field becomes  $p$ -divisible.

研究分野：整数論

キーワード：類体論 楕円曲線 類数

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

現代において「大域体」と言えば、代数体(=有理数体の有限次拡大)または、有限体上の一変数代数関数体(=有限体上の曲線の関数体)のことをあらわす。こうした全く異なる二種類の体において、多くの数論的な性質に類似性がある。この「類似」の研究は19世紀後半のDedekindにまで遡る歴史がある。類体論に限れば、E. Artin の寄与により、大域体の「イデール類群」でもってその体のAbel拡大(=Galois拡大でGalois群がAbel群)を統制することが出来るようになった。本研究では、別の方向の類似である局所体上の曲線に対する類体論とその周辺の問題、またその応用を考察する。

(剰余体を有限体とする)局所体には標数零、つまり $p$ 進数体の有限次拡大、及び正標数の体の二種類がある。標数零の場合の方が、「暴分岐」が出てこないため)幾分易しく、これまでに知られているほとんどの結果は、この場合に限られている。本研究では手始めに正標数局所体上の開曲線の類体論を考察することにした。

また標数零の場合に限っても、古典的な類体論と較べてまだ調べるべき問題がたくさん残っている。例えば、代数体の類数(つまり、代数体のイデール類群の位数)を計算することは、代数的整数論では重要な問題でありひとつの分野を形成していると言っても過言では無い。局所体上の曲線に対してもイデール類群や類数に相当するものが知られているので、これらを計算することは重要な問題であると思われる。

### 2. 研究の目的

- (1) 正標数局所体上の開曲線の類体論を考察する。
- (2)  $p$ 進体上の曲線に付随するイデール類群の類似である「類群」を具体的に計算する。
- (3) 代数体上の楕円曲線に付随する類数の下限をその楕円曲線の Mordell-Weil 群の階数で与える。

### 3. 研究の方法

$p$ 進体上の局所体上の曲線に付随する「類群」の計算について言えば、この群は $p$ 進体上の乗法群と曲線の Jacobi 多様体に付随する染川  $K$  群とよばれるある種の  $K$  群を使って書くことができる。この群の方が生成元と関係式が分かりやすいので計算するのに向いている。同様にふたつの  $p$ 進体上の楕円曲線に付随する染川  $K$  群の計算も同様に行うことができる。こちらの研究は Virginia 大学の E. Gazaki 氏との共同研究である。

### 4. 研究成果

本研究の研究成果は以下の通り。

- (1) 正標数局所体上の開曲線 (open curve) の類体論に関する論文を完成させ、投稿後、受理され採録決定となった。これは局所体上の曲線に対する相互写像の像と核を決定する、と言う問題である。
- (2) 有理数体上の楕円曲線に付随する(代数体の)類数の下限を Mordell-Weil rank で与える一連の研究に関して論文を完成させ、投稿後、受理され採録決定となった。素数  $p$  を固定したときに、有理数体上の楕円曲線が半安定であって尚且つ  $p$  で乗法的還元をもち付随する  $\text{mod } p$  ガロア表現が全射であるときに、楕円曲線の  $p$  冪等分点を添加した代数体の類数の下限がその楕円曲線の Mordell-Weil 階数で書けることが知られていた。今回、上記の仮定を大幅に減らした上に、証明を簡易化させることに成功した。また、その後、より一般的な代数体上の楕円曲線に対しても同

様の定理が成り立つことが分かった。これらの研究と、ガロア表現との関係についても最近多くのことが分かってきた。また楕円曲線の岩澤理論等の関わりがあると見られている。

- (3) 研究実施計画の通り、局所体上の曲線の(不分岐)類体論における「類群」の構造について研究を行った。特に曲線に付随する Jacobi 多様体が良通常還元 (good ordinary reduction) を持ち、さらに基礎体に適当な条件を課した上でこの曲線の類体論における類群を具体的に求めることができた。またより一般的な状況において、「類群」の構造を決定することまではできないが、楕円曲線に限ればこの群の「上限」と「下限」を与えることができることは分かった。
- (4) 加法的高次 Chow 群に関する短い論文を完成させ、投稿後、受理され採録決定となった。本質的には以前書いていて未発表であった論文に加筆・修正した物である。主結果では、加法的高次 Chow 群が自明になる条件をあたえた。(加法的ではない)高次 Chow 群の方に類似の定理が知られていた。
- (5) 局所体上の曲線に付随する Jacobi 多様体が良通常還元 (good ordinary reduction) を持ち、さらに基礎体に適当な条件を課した上でこの曲線の類体論における類群を具体的に求めた。これは S. Bloch 氏の類群の計算で残されていた  $p$ -part を与えたことになっている。この結果に関して論文を執筆し、現在投稿中である。また Jacobi 多様体の Neron モデルの special fiber が split torus となる場合にも具体的な計算を行うことが出来た。良通常還元でない場合は、まだ分かっていないが楕円曲線の場合で良超特異還元 (good supersingular reduction) を持つ場合には類群の取り得る範囲を与えることが出来たので、さらにこれを具体的に決定することは今後の課題である。
- (6) 局所体上のふたつの楕円曲線(または、より一般に Abel 多様体) に付随する染川  $K$  群の計算を行った。特に、これらの楕円曲線が良還元を持ち、基礎体が絶対不分岐である場合にこの  $K$  群が  $p$  可除的 ( $p$ -divisible) となるとの予想を立て、ほとんどの場合がこれが成り立つことを示すことが出来た。また良還元ではない場合も、同様の結果が成り立ち得ることを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi	4. 巻 49
2. 論文標題 Local torsion primes and the class numbers associated to an elliptic curve over $\mathbb{Q}$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Math. J.	6. 最初と最後の頁 117-128
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi	4. 巻 81
2. 論文標題 A vanishing theorem of the additive higher Chow groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Sci. Math. Jpn.	6. 最初と最後の頁 247-256
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32219/isms.81.3_247	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi	4. 巻 30
2. 論文標題 Class field theory for open curves over local fields	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. de theorie des nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 501-524
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/jtnb.1036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 局所体上の楕円曲線の「類数」について
3. 学会等名 大分鹿児島整数論
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 局所体上の関数体に対する類体論
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会（招待講演）
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 Class field theory for curves over local fields
3. 学会等名 Galois representations, ramification theory, and related topics
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 局所捻れ素数と楕円曲線に付随する類数
3. 学会等名 九州代数的整数論2018
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 Galois symbol maps for an abelian variety over a p-adic field
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----