

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05175

研究課題名(和文)カトック・サルナック型対応とその応用

研究課題名(英文)Katok-Sarnak type correspondences and their applications

研究代表者

水野 義紀(MIZUNO, Yoshinori)

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部(理工学域)・准教授

研究者番号：30546388

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：カトック・サルナック型対応、関連するディリクレ級数、および派生する数論的諸問題を追究し、多様な研究成果が得られた。例えば、高次元ポアンカレ級数に対するカトック・サルナック型対応、2次エルミート行列の跡から作られる三井ディクレ級数の解析接続(カトック・サルナック型対応の応用)、二次整環の類数とヒルツェブルフ和の合同式(付随する量の数論的研究)、さらにはアイゼンシュタイン級数の正規化ノルムと周期公式の拡張について新たな知見を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義  
興味深い現象に対する具体例を明示的に提供できたことが研究成果の学術的意義として挙げられる。二次体に限らず二次整環で議論することの有用性が認識できたことも重要である。得られた成果は継続して研究するに値する内容を含んでおり、今後の関連分野の発展に寄与するものと考えている。徳島県の高校生を対象とする数学オリンピック講習会の話題として成果の一部を取り上げ、数学への興味を引くことに寄与できたと思われる。これは広い意味での社会的意義と言えなくもない。

研究成果の概要(英文)：We obtain several results concerning Katok-Sarnak type correspondences, related Dirichlet series and relevant arithmetical topics. For examples, we establish a Katok-Sarnak type correspondence for Poincare series on higher dimensional hyperbolic space, analytic continuation of Mitsui's Dirichlet series associated to half-integral hermitian matrices, some congruences between class numbers of quadratic orders and Hirzebruch sums. Also, we evaluate regularized Petersson norms of several Eisenstein series to extend some period formulas.

研究分野：整数論、保型形式論

キーワード：カトック・サルナック型対応 ディリクレ級数 アイゼンシュタイン級数 類数 調和マース形式 正規化ノルム 周期公式 ポアンカレ級数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

正則・非正則モジュラー関数の一般 CM 点での値あるいは一般周期積分値の平均を考える。二次形式の判別式に類する量各々に平均値が付随し、平均値からなるひとつの数列が考えられる。この数列が非正則モジュラー形式のフーリエ係数と同定される現象が複数知られている。このタイプの結果をカトック・サルナック型対応と呼ぶことにしよう。結果自体も非常に印象的なものであるが、フーリエ係数とみなせることにより数列への理解が深まり、特に対応するディリクレ級数の研究と自然に結びつく。これらのディリクレ級数は概均質ベクトル空間のゼータ関数やワイル群多重ディリクレ級数と結びつくことも観察されている。こういった状況を踏まえ、カトック・サルナック型対応および関連するディリクレ級数をモジュラー形式の観点から追究する意義を感じていた。定数関数の平均値は二元二次形式の類数であり、 $SL(2)$ のアイゼンシュタイン級数の平均値は二次整環の  $L$  関数 (種の指標  $L$  関数) に他ならないため、数論との結びつきはいっそう直接的である。そして対応する母関数 (非正則モジュラー形式) は半整数重さの非正則アイゼンシュタイン級数になる。Chinta-Offen によれば、この種の平均値を  $GL(3)$ のアイゼンシュタイン級数の場合にと考えると、これも被覆群のアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数およびワイル群多重ディリクレ級数と結びつくという。その明示計算にあたって種の指標  $L$  関数の明示式が必要であった。研究代表者は一般の判別式の場合に種の指標  $L$  関数の明示式の計算を完遂させていた。また一般次元の双曲空間におけるアイゼンシュタイン級数に対するカトック・サルナック型対応を得ており、更なる拡張と応用の可能性を模索していた。

## 2. 研究の目的

独自の観点からカトック・サルナック型対応および関連するディリクレ級数とそれらの応用を追究することを目的とした。具体的には、既存の結果の精密化、新たなカトック・サルナック型対応の確立、関連するディリクレ級数の研究、それらの数論的応用を模索することである。また、インデックスを与える判別式に類する量は一般に扱うべきであり、数列 (すべてのフーリエ係数) を把握するという観点からは、所謂基本判別式に限るわけにはいかない。この意味で一般判別式に関わる現象や既存事実の一般判別式への拡張も追究の対象とした。実際、先に述べたとおり種の指標  $L$  関数および一般判別式をもつ二元二次形式の類数も研究対象とすることは自然である。考察の対象となるディリクレ級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数やワイル群多重ディリクレ級数との共通点や相補う事柄の追究も興味深いと思われた。

## 3. 研究の方法

上述したように研究代表者は関連する成果を得ており、その一般化や応用を第一の手がかりにすることを念頭においた。これまでの経験によりモジュラー形式を仲介する仕方でのディリクレ級数の取り扱い、特にガンマ因子の扱いによる級数の分離、および指数和や指標和の算術的計算、そして二次整環の整数論についての知見が深まっている。これらを基軸に、種々の古典解析的結果を必要に応じて調査して適用する。可能な限り明示することも主なテーマである。

## 4. 研究成果

(1) カトック・サルナック型対応および関連するディリクレ級数、派生する数論的応用に関しては次の成果が得られた。

( $m+1$ )次元双曲空間で定義されるポアンカレ級数に対するカトック・サルナック型対応を得ることができた。(  $m+1$ )次元双曲空間で定義されるポアンカレ級数の一般 CM 点平均値からなる数列を考察し、その数列が 2 次元双曲空間で定義されるポアンカレ級数のフーリエ係数として捉えられることを示した。但し、 $m$  は偶数でレベルは奇数かつ平方自由という条件が必要である。行列版クルースターマン和に関するザギエ型等式の拡張が必要であったが、織田孝幸氏のテータ対応の仕事[1]を活用することができた。一般周期積分値の平均もフーリエ係数と同定できると思われるが、確認が済んでおらず継続課題としたい。

ガウス数体上の半整数 2 次エルミート行列の跡から構成されるディリクレ級数 (三井のディリクレ級数) を全複素平面に解析接続することが出来た。対称行列の場合、2 次元上半平面の調和解析を用いる次のような先行結果が知られている：(i) 余コンパクトな離散群の場合 (Duke-Imamoglu[2]、江上[3])、(ii)  $SL(2, Z)$  の場合 (Diehl[4] (条件付き)、江上・佐藤[5] (詳細は未発表))。本研究では、先行研究の取り扱いを踏襲し、ディリクレ級数にパラメータを付け 3 次元上半空間の保型関数とみなしてスペクトル分解し、各スペクトル係数を解析接続・評価することで、所望の結果を導いた。3 次元上半空間と  $SL(2, Z[i])$  に関するスペクトル理論、カスプ形式の上限ノルム評価、測地曲面での基本領域の面積評価、関連するカトック・サルナック型対応、概均質ゼータの明示公式、ジエグル・ゼータの収束性などを活用した。以前の Roland Matthes との共同研究で得られたカトック・サルナック型対応が重要な役割をはたしている。余コンパクトでないことを反映してアイゼンシュタイン級数からの寄与の解析も必要であった。ここでは研究代表者による 2 次半整数エルミート形式に付随する概均質ゼータの明示公式が有用であった。

カトック・サルナック型対応と種の指標  $L$  関数や二元二次形式の類数の関係は上述したとおりである。種の指標  $L$  関数の明示式の応用により、ヒルツェブルフ和と実及び虚二次体の類数の間に成り立つ合同式を証明した。ここでヒルツェブルフ和とは実二次無理数の連分数展開項から定まる交代和のことをさす。Chua 達[6]による素数  $p \equiv 3 \pmod{4}$  の結果を素数  $p \equiv 1 \pmod{4}$  に拡張する Cheng-Guo[7]による試みを精密にし、そこで提示された予想を解いたことになる。判別式の条件を緩めるという問題意識から派生する一般判別式での考察が成功の鍵である。つまり素数  $p \equiv 3 \pmod{4}$  なら  $-p, -4$ 、その積  $4p$  がどれも基本判別式になるが、素数  $p \equiv 1 \pmod{4}$  なら  $-4p, -4$  は基本判別式だがその積  $16p$  は基本判別式ではない。この問題点が判別式  $16p$  をもつ種の指標  $L$  関数の明示式を利用して回避できた。計算も、基本判別式に関わる結果の応用に特化した Cheng-Guo の扱いに比してかなり簡略に済ませることができている。判別式の組を取り替える方向で Jigu Kim と考察を進め、類似な合同式が成り立つことを確認した。これは判別式  $-p, -q$  ( $p, q \equiv 3 \pmod{4}$  は素数) それぞれの類数と判別式  $pq$  の類数およびヒルツェブルフ和に関する結果である。実二次体の単数に関わる合同についての新しい知見を活用したが、その知見自身にも独立に価値がある。引き続き判別式  $-8p, 8p$  ( $p \equiv 3 \pmod{4}$  は素数) の類数およびヒルツェブルフ和に関する合同を判別式  $32p$  をもつ二次整環の整数論を活用して考察し、類似の合同式を法  $16$  で与え、より精密な法  $32$  での合同式の予想を与えた。

の内容を証明するための出発点は、種の指標 L 関数の明示式である。この明示式自体に別証明を与えることができた。カトック・サルナック型対応という視点に立ち、調和マース形式論における Duke-Imamoglu-Toth[8]、および松阪俊輝氏の結果[9]を援用するものである。明示式は複数の論文で引用されるようになってきており、喜ばしいことと思う。

(2) カトック・サルナック型対応をアイゼンシュタイン級数の場合に考えると、対応する母関数（非正則モジュラー形式）は半整数重さの非正則アイゼンシュタイン級数である。この非正則アイゼンシュタイン級数の考察により、半整数重さ正則アイゼンシュタイン級数の正規化ピーターソン・ノルムを明示的に計算することが出来た。まずノルムを定義する積分の収束に問題があり、何らかの正規化を要する。ひとつの正規化がザギエにより提案されていたが、整数重さの場合と異なり、半整数重さの場合、ノルムの厳密値の計算は易しくないと考えられていた。近年爆発的に発展中の調和マース形式論に示唆を受け、これまでの成果と併せることで半整数重さ正則アイゼンシュタイン級数の正規化ノルムの厳密値が得られた。独立に露峰茂明氏[10]も計算に成功していたことを知ったが、やり方は完全に異なるものである。応用としてコーネン・ザギエ公式をアイゼンシュタイン級数の場合に定式化した。引き続き林田秀一氏との共同研究により、ヤコビ・アイゼンシュタイン級数の正規化ピーターソン・ノルムの値を確定することが出来た。結果として Boecherer-Das[11]により提示された問題「彼らの正規化ノルムが消えるか消えないか」の解決に至った。モジュラー形式における露峰氏の方法[10]をヤコビ形式に拡張することによる。応用としてグロス・コーネン・ザギエ公式をアイゼンシュタイン級数の場合に定式化した。得られた結果を比較検討することで、アイヒラー・ザギエの本[12]の不注意な点(ある定数の計算ミス)に気づき修正することが出来た。

(3) 少し異なる系統に属するが、判別式の一般化という観点からは次の興味ある成果を得た。すなわち有理数の  $g$  進数展開係数をディリクレ指標で捻った値の平均を定義し、その明示公式を与えることに成功した。結果は一般ベルヌーイ数の和で表示される。応用として、素数  $p \equiv 3 \pmod{4}$  のときの  $1/p$  の  $g$  進数展開係数の交代和と判別式  $-p$  の虚二次体の類数  $h(-p)$  を結びつける Girstmair の公式[13]を、一般の虚二次体の場合にまで拡張した。証明は Murty-Thangadurai による指標なし平均値を扱った論文[14]にヒントを得て、指標を付け、指標の直交性を活用することによる。有理数の  $g$  進数展開係数の平均値から定まる行列式と一般虚アーベル体の相対類数を結びつける平林幹人氏による先行結果[15]に気づき相互関連を考察した。虚二次体に関して言えば、より明確化できていると思われる。徳島県の高校生を対象とした数学オリンピック講習会の話題として Girstmair の公式を取り上げたこと、判別式の条件を緩めるという問題意識をもっていたこと、および金子昌信氏とのヒルツェブルフ・ザギエ公式の拡張の際に学んだ発想(素数  $p \equiv 3 \pmod{4}$  の結果を、素数  $p \equiv 1 \pmod{4}$  に拡張する捉え方)[16]から派生したものである。

(4) その他 : その他の活動として、継続的に行っていた論文作成が実り、出版まで漕ぎつけられたことは特記できる。それらのいくつかは発表論文の項目に見られるとおりである。修正作業・改訂作業に伴い、知見を整理できたことも重要であった。また京都大学数理解析研究所における 2017 年度の研究集会「保型形式の解析的・数論的研究」の代表を務めた。さらに[16]の内容について東北大学で集中講義を行い、講義ノートを作成した。また、徳島県の高校生を対象とした数学オリンピック講習会において、初等整数論の基礎的内容と併せて、(3)で述

べた題材を取り入れて紹介した。こちらも講義ノートを作成することで知見を整理できたことは重要であった。

## [文献]

- [1] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature  $(2, n - 2)$ , Math. Ann. 231, 97-144 (1977)
- [2] W. Duke, O. Imamoglu, Lattice points in cones and Dirichlet series. Internat. Math. Res. Notices 2004, no. 53, 2823-2836 (2004)
- [3] S. Egami, On Dirichlet series arising in additive number theory of matrices. RIMS Kokyuroku 886, pp.178-186 (1994)
- [4] C. Diehl, Lattice points and Dirichlet series. Doctoral Thesis at ETH (2011)
- [5] S. Egami, Mitsui's Dirichlet series for  $2 \times 2$  symmetric matrices, RIMS Kokyuroku 1060, pp. 220-223 (1998)
- [6] L. Chua, B. Gunby, S. Park, A. Yuan, Proof of a conjecture of Guy on class numbers. Int. J. Number Theory, 11, no. 4, 1345-1355 (2015)
- [7] W. Cheng and X. Guo, Some congruences connecting quadratic class numbers with continued fractions. Acta. Arith, 191, 309-340 (2019)
- [8] W. Duke, O. Imamoglu, A. Toth, Cycle integrals of the  $j$ -function and mock modular forms. Ann. Math. (2) 173, No. 2, 947-981 (2011)
- [9] T. Matsusaka, Fourier coefficients of polyharmonic weak Maass forms. PhD Thesis at Kyushu University (2018)
- [10] S. Tsuyumine, Petersson scalar products and L-functions arising from modular forms. Ramanujan J. 52, No. 1, 1-40 (2020)
- [11] S. Boecherer, S. Das, Petersson norms of not necessarily cuspidal Jacobi modular forms and applications. Adv. Math, 336, 335-376 (2018)
- [12] M. Eichler, D. Zagier, The theory of Jacobi forms. Progress in Mathematics, 55. Birkhauser, v+148 pp (1985)
- [13] K. Girstmair, A "popular" class number formula. Amer. Math. Monthly, 10, No. 10, 997-1001 (1994)
- [14] R. Murty and R. Thangadurai, The class number of  $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$  and digits of  $1/p$ . Proc. Amer. Math. Soc. 139, No. 4, 1277-1289 (2011)
- [15] M. Hirabayashi, Generalizations of Girstmair's formulas. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb 75, 83-95 (2005)
- [16] M. Kaneko, Y. Mizuno, Genus character L-functions of quadratic orders and class numbers. J. London Math. Soc.(2), 102, 69-98 (2020)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Jigu Kim, Yoshinori Mizuno	4. 巻 60
2. 論文標題 Congruences for odd class numbers of quadratic fields with odd discriminant	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 939-963
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-022-00673-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshinori Mizuno, Roland Matthes	4. 巻 509
2. 論文標題 Koecher-Maass series associated to Hermitian modular forms of degree 2 and a characterization of cusp forms by the Hecke bound	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125904	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshinori Mizuno	4. 巻 227
2. 論文標題 Congruences relating class numbers of quadratic orders and Zagier's sums	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 352-370
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.03.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanobu Kaneko, Yoshinori Mizuno	4. 巻 102
2. 論文標題 Genus character L-functions of quadratic orders and class numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 69-98
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12313	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshinori Mizuno	4. 巻 32
2. 論文標題 Petersson norms of Eisenstein series and Kohnen-Zagier's formula	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 665-684
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/jtnb.1138	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yoshinori Mizuno	4. 巻 237
2. 論文標題 Rankin-Selberg convolutions of noncuspidal half-integral weight Maass forms in the plus space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 127-165
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2018.15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshinori Mizuno	4. 巻 30
2. 論文標題 Dirichlet series of two variables, real analytic Jacobi-Eisenstein series of matrix index, and Katok-Sarnak type result	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1437-1459
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2017-0119	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 水野義紀	4. 巻 --
2. 論文標題 種の指標L関数の明示式とその応用	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第11回福岡数論研究集会報告集 (電子版が <a href="http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/FSNT/17/reports.html">http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/FSNT/17/reports.html</a> にある)	6. 最初と最後の頁 83-95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hayato Kohama, Yoshinori Mizuno	4. 巻 64
2. 論文標題 Kernel functions of the twisted symmetric square of elliptic modular forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematika	6. 最初と最後の頁 184-210
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0025579317000389	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 水野義紀
2. 発表標題 アイゼンシュタイン級数のピーターソン・ノルム
3. 学会等名 東北大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 水野 義紀
2. 発表標題 アイゼンシュタイン級数のピーターソン・ノルム
3. 学会等名 愛知数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水野義紀
2. 発表標題 An explicit form of genus character L-functions and its applications
3. 学会等名 第11回福岡数論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 水野義紀
2. 発表標題 An explicit form of genus character L-functions and its applications
3. 学会等名 平成29年度・徳島数学談話会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水野義紀
2. 発表標題 An explicit form of genus character L-functions and its applications
3. 学会等名 第11回ゼータ若手研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水野義紀
2. 発表標題 アイゼンシュタイン級数のピーターソン・ノルム
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水野義紀
2. 発表標題 Petersson norm of Eisenstein series
3. 学会等名 Automorphic forms/representations on covering groups
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

徳島大学/研究教育者総覧---水野義紀  
<http://pub2.db.tokushima-u.ac.jp/ERD/person/186508/profile-ja.html>

水野義紀のホームページ  
<https://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~mizuno/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Leibniz University of Applied Sciences			
韓国	Ewha Womans University	Institute of Mathematical Sciences		