

令和 4 年 6 月 21 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05182

研究課題名(和文)ゼータ関数・テータ関数の加重・多重平均化 定式化と挙動解明

研究課題名(英文) Multiple and weighted averaging of zeta and theta functions--their formulations and asymptotics--

研究代表者

桂田 昌紀 (Katsurada, Masanori)

慶應義塾大学・経済学部(日吉)・教授

研究者番号：90224485

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究代表者は、i) Lerch ゼータ関数の主変数 s に関する Laplace-Mellin 型、Riemann-Liouville 型積分変換、及び、それらの適切な iteration(s) に対して、 s が扇状領域 $|\arg s| < \pi$ 内を其々 $s \rightarrow 0$ 及び $s \rightarrow \infty$ となるときの完全漸近展開を確立した；ii) 一般化正則 Eisenstein 級数に対して、付随するパラメタ z が複素上半平面 $0 < \arg z < \pi$ 内を $z \rightarrow 0$ 及び $z \rightarrow i\infty$ となる其々の場合について、完全漸近展開を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

i) Lerch ゼータ関数の平均化：ゼータ関数に対する種々の積分変換を考察する研究は、これまでは Laplace 変換や Mellin 変換に関するものが主流であったが、今回、本研究で得られた成果から、新たに Laplace-Mellin 型、Riemann-Liouville 型や、それらの適切な iterations(s) 等の新たなクラスに対しても意義ある結果を導出できることが判明した；

ii) Dirichlet-Hurwitz-Lerch 正則 Eisenstein 級数に付随する漸近展開：表記の漸近展開から、Ramanujan による著名な公式等を含む極めて広範な応用も得られる。

研究成果の概要(英文)：i) Averaging of the values of Lerch zeta-functions: The head investigator has shown that complete asymptotic expansions exist for the Laplace-Mellin and Riemann-Liouville transforms, together with their appropriate iterations, of Lerch zeta-functions in terms of their pivotal variable s of the transforms, when $s \rightarrow 0$ and $s \rightarrow \infty$ both through the sector $|\arg s| < \pi$. The region of validity of these asymptotic expansions contain any vertical ray through imaginary directions; this allows us in general fairly nice applicability to the problems of analytic number theory;

ii) Asymptotic expansions associated with Dirichlet-Hurwitz-Lerch holomorphic Eisenstein series: The head investigator, jointed with (his collaborator) Professor Takumi Noda, have established complete asymptotic expansions exist for Dirichlet-Hurwitz-Lerch holomorphic Eisenstein series when the associated parameter z of the series tends to 0 and $i\infty$ both through the complex upper half-plane $0 < \arg z < \pi$.

研究分野：解析的整数論

キーワード：zeta-function theta function asymptotic expansion mean value

1. 研究開始当初の背景：

本研究代表者は、本研究開始当初の2016年末頃に、Lerch ゼータ関数 $\zeta(s, a, \lambda)$ ($s > 0$, λ は任意の実数)の主変数 s に関する Laplace-Mellin 型(積分)変換に対する漸近展開を(主変数 s がある限定的な領域にあるという状況の下で)導出していた。ここで得られた漸近展開は、本研究の prototype と看做せる結果であり、この研究の方向性で、差し当って、1) 漸近展開の有効域を拡大する；2) Laplace-Mellin 型変換以外にも、漸近展開が存在する Lerch ゼータ関数の種々の積分変換を探索する、という二つの問題意識において研究を推進していた。他方、本研究代表者は同時期に、日本大学工学部の野田 工 教授と共同で、2つの複素変数 $\mathbf{s}=(s_1, s_2)$ 及び2つの複素パラメタ $\mathbf{z}=(z_1, z_2)$ を持つ2変数2重正則 Eisenstein 級数に対して、パラメタ z_j ($j=1,2$) がともに複素上(下)半平面 $\text{Im} z_j > 0$ 内を、 $|z_2 - z_1| \rightarrow 0$ 及び $|z_2 - z_1| \rightarrow \infty$ となる各々の場合について、完全漸近展開を導出した。これらの展開からは、2変数2重 Eisenstein 級数に関して、古典的な Kronecker 極限公式の一般化や、整数格子点上の特殊値に関する様々な明示公式が自然の形に導かれる。ここで得られた2変数2重 Eisenstein 級数の漸近展開についても、様々な積分変換との関連で、何らかの新たな漸近展開を探索出来ないか、といった問題意識がいま一つの研究の方向性として射程に入りつつあった。

2. 研究の目的：

- 1) Lerch ゼータ関数 $\zeta(s, a, \lambda)$ の主変数 s に関する Laplace-Mellin 型、Riemann-Liouville 型(積分)変換の漸近展開の導出： $\zeta(s, a, \lambda)$ に、ガンマ関数型加重を持った Laplace-Mellin (積分)作用素を作用させ、主変数 s が扇状領域 $|\arg s| < \pi$ 内を $s \rightarrow 0$ 及び $s \rightarrow \infty$ となるとき各々の場合について、 s に関する完全漸近展開を導出する。同じく $\zeta(s, a, \lambda)$ に対して、ベータ関数型加重を持った Riemann-Liouville 型(積分)作用素を作用させ、主変数 s が同様の扇状領域内を $s \rightarrow 0$ 及び $s \rightarrow \infty$ となるとき各々の場合について、やはり s に関する完全漸近展開を導出する。更には、これら Laplace-Mellin 型、Riemann-Liouville 型(積分)変換の適切な iteration(s) により生成される新たな積分変換についても、同様の完全漸近展開が存在するかどうかについて解明する；
- 2) 非正則2変数2重 Eisenstein 級数及びその平均化に付随する漸近展開：上記項目1. の述べた正則2変数2重 Eisenstein 級数に対しては、付随するパラメタ $\mathbf{z}=(z_1, z_2)$ の動きを適切に定式化することで、完全漸近展開が存在することを解明することが出来た。そこで、これに後続するテーマとして、非正則2変数2重 Eisenstein

級数に対しても ,パラメタ $\forall \mathbf{z}=(z_1,z_2)$ の動きを適切に定式化することで ,同様の完全漸近展開を導出できないかと考えるのは自然である .そこで ,この研究の方向性では ,差し当たり非正則 2 変数 2 重 Eisenstein 級数の完全漸近展開の導出を第 1 の step とし て ,更には ,上記 1)で Lerch ゼータ関数に対して行ったような様々な積分作用素を (非)正則 2 変数 2 重 Eisenstein 級数に対しても適切に定式化した上で作用して ,完全漸近展開を導出するとともに ,完全漸近展開が存在する状況を確定することを目的とする .

3 . 研究の方法 :

1) Lerch ゼータ関数 $\forall \phi(s,a,\forall \lambda)$ の主変数 s に関する Laplace-Mellin 型 , Riemann-Liouville 型 (積分)変換の漸近展開の導出 :この方向の研究での主な手法は ,これらの積分変換を Mellin-Barnes 型の積分表示によって捉えることである .補助 Lerch ゼータ関数 $\forall \phi_r(s,a,\forall \lambda)$ (s は複素変数)を適切に導入し ,これを Mellin-Barnes 型積分の積分核に挿入することで ,上記の Laplace-Mellin 型 ,Riemann-Liouville 型 ,及びそれらの iteration(s) についても ,Meliin-Barnes 型積分表示が可能になる .ひとたびこれら Mellin-Barnes 型積分表示が確立されれば ,垂直な積分路に適切な移動を施すことで ,種々の漸近展開を導出することが出来る ;

2) 非正則 2 変数 2 重 Eisensiten 級数及びその平均化に付随する漸近展開 :この研究の方向性においても ,(非)正則 2 変数 2 重 Eisenstein 級数に対して ,Mellin-Barnes 型積分表示を確立することが解明にとって本質的に重要となる .2) のケースでは ,S. Ramanujan によって導入された 2 変数関数 $\forall \text{verPhi}_{\{r,s\}}(q)$ が Mellin-Barnes 型積分の積分核に適切に挿入する必要がある .(非)正則 2 変数 2 重 Eisenstein 級数の積分変換の解明においては ,ここで得られた Mellin-Barnes 型積分の更なる積分変換を考察することが中心課題となる .

4 . 研究成果 :

1) Lerch ゼータ関数 $\forall \phi(s,a,\forall \lambda)$ の主変数 s に関する Laplace-Mellin 型 , Riemann-Liouville 型 (積分)変換の漸近展開の導出 :この方向では ,ほぼ満足できる成果が得られており ,Lerch ゼータ関数の $\forall \phi(s,a,\forall \lambda)$ の主変数 s に関する Laplace-Mellin 型 ,Riemann-Liouville 型 ,及びそれらの適切な iteration(s) に対して ,主変数 s が扇状領域 $|\forall \arg s| < \forall \pi$ 内を $s \forall \rightarrow 0$ 及び $s \forall \rightarrow \forall \infty$ となる各々の場合について ,完全漸近展開を導出することに成功した ;

2) 正則・非正則 2 変数 2 重 Eisensiten 級数及びその平均化に付随する漸近展開 :この方向では 2 変数 2 重 Eisenstein 級数について ,付随する複素パラメタ

$\forall \mathbf{z}=(z_1,z_2)$ の複素上 (下) 半平面 $\forall \text{frac}\{H\}^{\forall \pm}$ 上での動きを適切に定式化することで , z_1 と z_2 の距離が $|z_2-z_1| \forall \rightarrow 0$ 及び

$|z_2-z_1| \forall \rightarrow \forall \infty$ となる各々の場合について ,完全漸近展開を導出することに成功した .

更には、この延長線上で、(1変数) Dirichlet-Hurwitz-Lerch 型正則 Eisenstein 級数
に対しても、付随する複素パラメタ z が、複素上半平面 $0 < \arg z < \pi$ 内を
 $z \rightarrow 0$ 及び $z \rightarrow \infty$ となる各々の場合について、完全漸近展開を導出すること
にも成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 KATSURADA, Masanori	4. 巻 84
2. 論文標題 Asymptotic expansions associated with various zeta-functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 205--262
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08410205	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 KATSURADA, Masanori; NODA, Takumi	4. 巻 2162
2. 論文標題 Transformation formulae and asymptotic expansions for double non-holomorphic Eisenstein series of two complex variables (summarized version)	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 in "Kokyuroku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 10--21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Katsurada	4. 巻 No. 2031
2. 論文標題 Asymptotics for higher derivatives of the Lerch zeta-function: applications to the formulae of Kummer, Lerch and Gauss	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 in "Kokyuroku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 pp. 166--176
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masanori KATSURADA and Takumi NODA	4. 巻 No. 2092
2. 論文標題 Asymptotic expansions for a class of generalized holomorphic Eisenstein series: applications to Weierstrass' elliptic function and Ramanujan's formula for $\zeta(2k+1)$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 in "Kokyuoku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 212 225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masanori KATSURADA	4. 巻 No. 2131
2. 論文標題 Asymptotic expansions associated with higher derivatives of the Lerch zeta-function: applications to the formulae of Kummer, Lerch and Gau(¥ss)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 in ``Kokyuroku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 166 176
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Katsurada and Takumi Noda	4. 巻 44
2. 論文標題 Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 237--280
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-017-9922-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Katsurada	4. 巻 No. 2236
2. 論文標題 Complete asymptotic expansions for the transformed Lerch zeta-functions via the Laplace-Mellin and Riemann-Liouville operators (pre-announcement)	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 in ``Kokyuroku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 56--67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Katsurada	4. 巻 No. 2196
2. 論文標題 Asymptotic expansions for the multiple Laplace-Mellin transform of Lerch zeta-functions and applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 in ``Kokyuroku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 79--93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Katsurada	4. 巻 No. 2203
2. 論文標題 Complete asymptotic expansions for the transformed Lerch zeta-functions via the Laplace-Mellin and Riemann-Liouville operators (pre-announcement)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 in "Kokyuroku," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 56-67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計6件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 KATSURADA, Masanori
2. 発表標題 Asymptotic expansions for the multiple Laplace-Mellin transforms and applications
3. 学会等名 Research Institute for Mathematical Sciences, Workshop 2020 "Problems and Prospects in Analytic Number Theory" (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masanori Katsurada
2. 発表標題 Asymptotic expansions associated with a non-holomorphic Eisenstein series of two complex variables
3. 学会等名 "Analytic Number Theory and Related Topics," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masanori KATSURADA
2. 発表標題 Asymptotic expansions for higher derivatives of the Lerch zeta-function
3. 学会等名 "Analytic Number Theory and Related Topics", Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masanori KATSURADA
2. 発表標題 Asymptotic expansions for a class of generalized holomorphic Eisenstein series: applications to Ramanujan's formula for $\zeta(2k+1)$, Weierstrass' elliptic and allied functions
3. 学会等名 大分鹿児島整数論研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masanori Katsurada
2. 発表標題 Asymptotic expansions for various zeta-functions: a survey
3. 学会等名 "Various Aspects of Multiple Zeta Functions" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masanori Katsurada
2. 発表標題 Asymptotic expansions for a class of generalized holomorphic Eisenstein series: applications to Weierstrass' elliptic function and Ramanujan's formula for $\zeta(2k+1)$
3. 学会等名 "Analytic Number Theory and Related Areas," Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Diophantine Analysis and Related Fields 2018	開催年 2018年～2018年
--------------------------------------------------------	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------