

令和 2 年 4 月 10 日現在

機関番号：32663

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05184

研究課題名(和文) 数論的多様体のスペクトルの一様性と深リーマン予想

研究課題名(英文) Uniformity of spectra of arithmetic manifolds and the deep Riemann hypothesis

研究代表者

小山 信也 (Koyama, Shin-ya)

東洋大学・理工学部・教授

研究者番号：50225596

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：以下、セルバーグ・ゼータ関数に対し、極は位数が負の零点とみなし、零点と極を総称して「零点」と呼ぶ。本研究期間全体を通じて得た研究成果は、以下の通りである。(1) フックス群にユニタリ表現を付したセルバーグ・ゼータ関数のオイラー積を、例外固有値に対して明示的に書ける項で割った値は、実部が $1/2$ より大きい領域で収束する。特にセルバーグ $1/4$ 固有値予想の仮定の下でユニタリ表現が非自明なときは、実部が $1/2$ より大きい半平面で収束する。(2) 前項のオイラー積が収束した値は、セルバーグ・ゼータ関数の解析接続による値と本質的に(明示的に書ける例外固有値の寄与と、符号を除いて)一致する。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン予想が未解決である理由の一つに、予想の定式化が不十分であるという説が長らく唱えられてきた。深リーマン予想はこれを解消するために2010年代に提唱された予想であり、リーマン予想が成り立つ背景にオイラー積の挙動があると主張している。オイラー積の挙動、特に非自明な表現に対するL関数のオイラー積の臨界領域における収束性が示されれば、リーマン予想を証明でき、さらにその成立理由も解明できる。これまで、標数正の関数体上で深リーマン予想の成立が確かめられてきた。本研究では、フックス群のセルバーグ・ゼータ関数に対し、深リーマン予想に相当する命題を証明した。これは、標数0の場合に初めて得られた結果である。

研究成果の概要(英文)：The main results which we obtained in this research period are as follows:

(1) For any Fuchsian group the Euler product of the Selberg zeta function attached with a unitary representation divided by certain explicit terms coming from exceptional zeros and poles converges in the region $\text{Re}(s) > 1/2$. In particular, the Euler product of the Selberg zeta function converges in $\text{Re}(s) > 1/2$ for any nontrivial irreducible unitary representation under the Selberg $1/4$ -eigenvalue conjecture. (2) The value of the Euler product obtained in (1) agrees to the value of the Selberg zeta function defined by its analytic continuation.

研究分野：整数論

キーワード：ゼータ関数 セルバーグ・ゼータ関数 リーマン予想 深リーマン予想 オイラー積 素測地線定理 素数定理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

リーマン予想が未解決である理由の一つに、予想の定式化が不十分であるという説が長らく唱えられてきた。深リーマン予想はこれを解消するために2010年代に提唱された予想であり、リーマン予想が成り立つ背景にオイラー積の挙動があると主張している。その主張は以下の通りである。

(1) L関数が極を持たないとき、オイラー積は半平面 $\text{Re}(s) > 1/2$ でL関数の値に収束し、 $\text{Re}(s) = 1/2$ 上では、L関数の値がまたはその定数倍(定数は2の平方根の整数べきで表され、べきの整数はL関数とsによって明示的に書ける)である。

(2) L関数が $s=1$ で極を持つとき、半平面 $\text{Re}(s) > 1/2$ および臨界線 $\text{Re}(s) = 1/2$ におけるオイラー積の発散の挙動はある明示的な漸近式(赤塚の公式)に従う。

特に、非自明な表現に対するL関数のオイラー積の臨界領域 $\text{Re}(s) > 1/2$ における収束性が示されれば、リーマン予想を証明できる。深リーマン予想は、これまで未解明であったリーマン予想の成立理由を解明し、素朴な素数分布との直接的な関係も示せる命題として期待されている。深リーマン予想は、素数定理の誤差項について、リーマン予想下で得られるよりも小さな誤差項をもたらすことがわかっており、リーマン予想の真の一般化、精密化という点でも注目値する。これまで、研究代表者らによって、標数正の関数体上で深リーマン予想の成立が確かめられてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、数論的フックス群のセルバーグ・ゼータ関数(任意のユニタリ表現付き)に対し、臨界領域内におけるオイラー積の挙動を解明することである。ユニタリ表現が非自明で既約なときは、セルバーグ・ゼータ関数は極を持たないため、前項(1)のケースとなり、オイラー積は収束することが期待される。また、ユニタリ表現が自明なときは、前項(2)のケースとなるが、その場合に赤塚の公式に対応する公式を見出し、深リーマン予想に相当する命題を証明することが目的である。

3. 研究の方法

研究代表者は研究期間初年度に当たる2017年に金子生弥氏(現つくば開成高校)と知り合い、以後、本研究は金子氏との共同研究で行った。

(1) 初年度には、研究代表者が特殊なユニタリ表現に関して実部が $3/4$ より大きい領域でオイラー積が収束することを証明し、それを金子氏が任意の非自明なユニタリ表現に一般化した。研究方法はコンラッド(2005)の解析方法に従い、オイラー積の対数である素元にわたる無限和を、アーベル総和法などの技術を用いて変形し、ペロンの公式や留数定理を用いる標準的な解析的整数論のテクニックを使って収束性を示した。

(2) 研究期間2年目に当たる2018年度には、一年目に得た結果を、実部が $1/2$ より大きい領域に拡張することに、セルバーグ $1/4$ 固有値予想の仮定の下で成功した。研究方法は、ラマヌジャンが $s=1/2$ においてリーマン・ゼータ関数のオイラー積の挙動を研究した方法(論文は1997年に公開されたため、長らく知られていなかった)をセルバーグ・ゼータ関数に適用した。それによって、まず、

(3) 研究期間の最終年度である2019年度には、セルバーグ $1/4$ 固有値予想の仮定を外し、例外固有値が存在する場合に、(1)(2)で得ていた定理を一般化した。その後、さらに、ユニタリ表現が非自明であるという仮定を外し、自明な表現の場合、セルバーグ・ゼータ関数が $s=1$ に特異点を持つ場合にも、その寄与を具体的に書き下すことにより、その項でオイラー積を割った値が収束することを証明した。これによって、任意のユニタリ表現に主結果は一般化された。

4. 研究成果

以下、極は位数が負の零点とみなし、零点と極を総称して「零点」と呼ぶ。本研究では、数論的フックス群として、モジュラー群の合同部分群および、コンパクトリーマン面の基本群のうち四元数環から構成されるものを扱う。関数 $\zeta_{\Gamma, x}(s, \rho)$ を、

$$\zeta_{\Gamma, x}(s, \rho) = \prod_{N(p) \leq x} \det(I_{\dim \rho} - \rho(p)N(p)^{-s})^{-1}$$

で定義する。ここで ρ は Γ の素双曲共役類をわたり、 $N(p)$ はそのノルム、 I は単位行列である。 $\text{Re}(s) > 1$ なる s に対し、この式で $x \rightarrow \infty$ とした関数を、セルバーグ・ゼータ関数 $\zeta(s, \rho)$ と定義する。本研究期間全体を通じて得た研究成果は、以下の通りである。まず、前項(2)のラマヌジャンの方法により、次の定理を証明した。

定理 1. $\text{Re}(s) > 1/2$ のとき、 $x \rightarrow \infty$ において、次式が成り立つ。

$$\zeta_{\Gamma,x}(s) = \varepsilon_{\Gamma}(s) \zeta_{\Gamma}(s) \exp \left(\text{Li}(\Theta_{\Gamma}(x)^{1-s}) + \sum_{\frac{1}{2} < s_j < 1} \text{Li}(x^{s_j-s}) - \frac{x^{-s}}{\log x} \sum_{\frac{1}{2} < s_j < 1} \frac{x^{s_j}}{s_j} + O(x^{\frac{1}{2}-\sigma}(\log x)^2) \right)$$

ただし, $\Theta_{\Gamma}(x)$ は解析数論における標準的な記号で $\log N(p)$ たちの p にわたる和, s_j は例外固有値に対応する例外零点, Li は対数積分関数で $\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{t}$ である.

これは表現 $\zeta_{\Gamma,x}(s)$ が自明な場合であるから, 前項(2)のケースであり, 臨界領域内でのオイラー積の発散の状況を表したものである. \exp 内の初項が例外零点 (極) $s=1$ の寄与であり, 第2項がその他の例外零点の寄与で, ここまでが発散項である. 下段の項はいずれも0に収束する.

定理1によって発散の様子が明示的に書けた. これを変形して赤塚の公式に類似の形にすることも, 論文中では成功している. 次に, 表現を付けた場合に, 次の定理を得た.

定理2. 任意のユニタリ表現 ρ と, $\text{Re}(s) > 1/2$ に対し, $1 \leq T \leq \sqrt{x}/\log x$ の下で, $x \rightarrow \infty$ において, 次式が成り立つ.

$$\zeta_{\Gamma,x}(s, \rho) = \varepsilon_{\Gamma}(s, \rho) \zeta_{\Gamma}(s, \rho) \times \exp \left(\sum_{\frac{1}{2} < s_j \leq 1} \text{Li}(x^{s_j-s}) + \frac{x^{\frac{1}{2}-s}}{\log x} \sum_{|t_j| \leq T} \frac{x^{it_j}}{s_j} + O\left(\frac{x^{1-\sigma}}{T} \log x\right) \right)$$

とくに, $\text{Re}(s) > 3/4$ においては, 次式が成り立つ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta_{\Gamma,x}(s, \rho) \prod_{\frac{3}{4} < s_j \leq 1} \exp(-\text{Li}(x^{s_j-s})) = \varepsilon_{\Gamma}(s, \rho) \zeta_{\Gamma}(s, \rho)$$

すなわち, 例外零点の寄与を除けば, 上式の意味でオイラー積は収束する.

定理2は, $\text{Re}(s)=1$ の十分近く (例外零点の存在しない領域) におけるオイラー積の収束を含んでおり, 標数0のオイラー積が臨界領域内で収束することを証明した初めての結果となっている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takeda Wataru, Koyama Shin-ya	4. 巻 0
2. 論文標題 Estimates of lattice points in the discriminant aspect over abelian extension fields	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2017-0152	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 3件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Shin-ya Koyama
2. 発表標題 Euler products of Selberg zeta functions in the critical strip
3. 学会等名 Canadian Number Theory Association IX（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin-ya Koyama
2. 発表標題 Euler products of Selberg zeta functions in the critical strip
3. 学会等名 Zeta Functions in Okinawa 2018（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小山信也・金子生弥
2. 発表標題 セルバーグ・ゼータ関数のオイラー積の収束性
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin-ya Koyama and Ikuya Kaneko
2. 発表標題 Convergence of Euler products of Selberg zeta functions
3. 学会等名 Zeta Functions in Okinawa 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shin-ya Koyama
2. 発表標題 Convergence of Euler products of the absolute tensor products of L-functions
3. 学会等名 The Riemann-Roch Theorem over the One-Element Field (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin-ya Koyama
2. 発表標題 Applications of Ramanujan's method on the behavior of Euler products of Selberg zeta functions
3. 学会等名 Analytic and Combinatorial Number Theory: The Legacy of Ramanujan (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 小山 信也、黒川 信重	4. 発行年 2018年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 168
3. 書名 ゼータへの招待	

〔産業財産権〕

〔その他〕

クロフォード・A・ビッグオーバー，小山信也（監訳）「1日1ページ数学の教養365」ニュートンプレス(株)，2020年．408ページ．

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----