

令和 3 年 5 月 7 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05186

研究課題名(和文)階層構造付き対称性を持つ多変数保型形式の研究

研究課題名(英文)A study on automorphic forms of several variables with symmetries of level structure

研究代表者

村瀬 篤 (MURASE, Atsushi)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：40157772

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：多変数保型形式の対称性とBorcherds型の無限積展開の関係について研究を行った。階層構造付きの乗法対称性を持つ保型形式の族は、Borcherds型の無限積を持つことを証明することを目標にした。成果としては、ヤコビ保型形式の場合は、階層構造付きの対称性と無限積展開が同値になることを示した。その結果を用いて、2次ジーゲル保型形式の場合に同様のこと、すなわち、階層構造付きの対称性と無限積展開が同値になることを示した。また、ひとつの素数に関するHecke型の対称性を持つ平面曲線がモジュラー曲線になること、および完全再生可能関数は階層構造付き乗法対称性によって特徴付けられることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変数保型形式の整数論は近年研究が進んでいるものの、いまだ未解決の問題が多く、研究テーマとして大変興味深い分野である。多変数保型形式の中でも、Borcherds型の無限積展開を持つものは、代数幾何学や数理論理学とも関係して、重要な研究対象である。本研究では、Borcherds型の無限積展開を持つことと、本研究で新しく導入された階層構造を持つHecke型の乗法対称性が同値であることを、ヤコビ保型形式と2次ジーゲル保型形式の場合に証明した。与えられた保型形式がBorcherds型の無限積展開を持つかどうかは、判定が難しい問題だったが、本研究によって、判定する新しい方法が得られた。

研究成果の概要(英文)：We investigated on relations between certain symmetries of automorphic forms of several variables and infinite product expansions of Borcherds type. Our goal is to show that a family of automorphic forms with multiplicative symmetries of level structure has an infinite product expansion of Borcherds type. In this study, we showed that a family of Jacobi forms with multiplicative symmetries of level structure has an infinite product expansion. By using this result, we also showed that a family of Siegel modular forms of degree 2 with multiplicative symmetries of level structure has an infinite product expansion. We also proved that a plane curve with a single symmetry of Hecke type is in fact a modular curve, and that completely replicable functions are characterized by multiplicative symmetries of level structure.

研究分野：整数論

キーワード：Borcherds積 対称性 階層構造 ヤコビ保型形式 ジーゲル保型形式 モジュラー曲線 完全再生可能関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Borcherds は、1995 年と 1998 年に発表した論文において、符号 $(2, n)$ の 2 次形式に関する直交群 $O(2, n)$ 上の全く新しい保型形式を、無限積 (Borcherds 積) の形で構成した。この保型形式を、Borcherds リフトと呼ぶ。この理論は、無限次元 Lie 代数、例外型有限単純群、数理物理学 (超弦理論) 等に関連しており、代数幾何学などへの応用も見いだされている。数年前から、研究代表者と B. Heim 氏 (研究協力者、現在アーヘン工科大学) は、 $O(2, n)$ 上の保型形式が Borcherds リフトとなるための必要十分条件を探求していた。このような Borcherds リフトの特徴付けは、ある保型形式が無限積表示を持つかどうか判定する理論的根拠になりうる。本研究を開始した 2017 年時点で、研究代表者と B. Heim 氏の共同研究において、 $O(2, n)$ 上の保型形式でレベル 1 のものに関し、次を示していた。

(1) 保型形式がヤコビ保型形式からのテータリフトであることと、すべての素数に関する Hecke 型の加法対称性を持つことは同値であること。

(2) 保型形式が Borcherds リフトになることと、すべての素数に関する Hecke 型の乗法対称性を持つことは同値であること。

(3) (2) の応用 ($n=2$ の場合) として、モジュラー多項式というモジュラー不変量に関連する古典的な対象 (2 変数多項式) がすべての素数に関する Hecke 型の対称性によって特徴づけられること。

2. 研究の目的

(1) 上記の結果(1),(2)をレベルが 2 以上の場合に一般化すること。

(2) 上記(3)の結果の精密化を行うこと。すなわち、モジュラー多項式を単独の (1 個の素数に関する) Hecke 対称性によって特徴づけること。これに関連する数論幾何的な問題として、平面曲線がモジュラー曲線になること (すなわち、モジュラー形式で一意化されること) と Hecke 型の対称性との関係を調べること。

(3) 有限群論において重要な役割を果たす「完全再生可能関数」を Hecke 型の対称性によって特徴づけること。完全再生可能関数は、有限単純群の既約指標に関連して現れ、Borcherds の 1992 年の論文でなされた「モンスター予想」の証明で決定的な役割を果たした。Norton は、完全再生可能関数が、 $p=2$ においてある種の対称性を持つことを指摘していた。本研究では、ある無限 q -級数の系列が、すべての素数に関する Hecke 型の対称性を持つならば、それらが完全再生可能関数になることを示すことを目標とした。

3. 研究の方法

(1) 最初の試みとして、レベルが 2 以上の保型形式を単独で考察したが、うまくいかないことが判明した。この困難を克服するために、様々なレベルの保型形式の族を考察し、その族全体における Hecke 型の階層構造付き対称性を、テータリフトや無限積表示可能性と結びつけるという方針で研究を進めた。その過程で、様々なレベルのヤコビ保型形式の族について、無限積表示可能性と Hecke 型の対称性が同値であることを証明する必要性が生じた。

(2) モジュラー多項式を単独の (1 つの素数に関する) Hecke 型の対称性によって特徴づけることと、Andre の数論幾何的な結果 (モジュラー曲線を CM 点の存在で特徴づけること) を結びつける方針で研究を進めた。

4. 研究成果

(1) 整数係数のベクトル系の族から Borcherds 型の無限積の族を構成し、それらが様々なレベルのヤコビ保型形式の族をなすことを示し、これらがすべての素数に関する Hecke 型の階層構造付き乗法対称性を持つことを示した。また、無限次元の twisted アフィン Lie 環の分母公式が、このように構成されることを示した。(Heim 氏との共同研究)

(2) (1) の結果の逆、すなわち様々なレベルのヤコビ保型形式の族がすべての素数に関する Hecke 型の階層構造付き乗法対称性を持つならば、ある整数係数のベクトル系の族から構成されるヤコビ保型形式の族と定数倍を除いて一致することを示した。(1)、(2) の研究成果については、専門雑誌に論文を投稿中である。(Heim 氏との共同研究)

(3) Borcherds 積は、符号 $(2, n)$ の 2 次形式に関する直交群上の保型形式を構成する有力な方法である。Borcherds 積は、その零点と極が明示的にわかることから、代数幾何学や数理物理学においても重要な役割を果たしている。Borcherds の原論文においては、レベルが 1 のものが構成されていたが、その後の研究において、レベル 2 以上のものも構成されている (たとえば、青木-伊吹山など)。本研究において、レベル 2 以上の Borcherds 積を組織的に研究した。まず、様々なレベルのヤコビ保型形式の族から、Borcherds 型の無限積を構成し、それらが様々なレベルの 2 次ジーゲル保型形式の族であること、またそれらがすべての素数に関する Hecke 型の階層構造付き乗法対称性を持つことを示した。さらに、(1)、(2) の結果を用いて、様々なレベルの 2 次ジーゲル保型形式の族がすべての素数に関する Hecke 型の階層構造付き乗法対称性を持つならば、ある様々なレベルのヤコビ保型形式の族から構成される Borcherds 積の族と定数倍を

除いて一致することを示した。この結果については、現在研究成果を論文にまとめている段階である。(Heim 氏との共同研究)

(4) 様々なレベルの 2 次ジークル保型形式の族がすべての素数に関する Hecke 型の階層構造付き加法対称性を持つならば、ある様々なレベルのヤコビ保型形式の族から構成されるテータリフトの族と定数倍を除いて一致することを示した。また、符号 $(2, n)$ の 2 次形式に関する直交群 $O(2, n)$ の構造に関するある事実を証明できれば、同様のことが $O(2, n)$ 上の保型形式についても成り立つことを示した。これらの結果については、現在研究成果を論文にまとめている段階である。(菅野隆史氏(研究協力者、金沢大学)との共同研究)

(5) モジュラー多項式は楕円曲線の理論や虚数乗法論において、重要な役割を果たす 2 変数の多項式である。モジュラー多項式は、すべての素数に関して Hecke 型の乗法対称性を持つことが古くから知られていた。逆に、モジュラー多項式は、2 変数の多項式のうち、すべての素数に対する積対称性によって特徴付けられることを、以前の Heim 氏との共同研究において、解析的な手法で示していた。本研究では、モジュラー多項式が、2 変数の多項式のうち、ひとつの素数に対する Hecke 型の対称性によって特徴付けられることを示した。証明には、モジュラー曲線を、その上の特殊点によって特徴づける Andre の数論幾何的結果を用いる。この結果の幾何的定式化として、平面曲線がモジュラー曲線になることと、1 つの素数に関する Hecke 型の乗法対称性を持つことが同値であることを示した。これらの結果は、専門雑誌に掲載済みである。(Heim 氏、Kaiser 氏(マックス・プランク研究所)との共同研究)

(6) 「完全再生可能関数」は、ある条件を満たす形式的べき級数の族として Norton により導入されたものである。本研究では、完全再生可能関数は、階層付き乗法対称性を満たす無限 q -級数として特徴づけられることを示した。この結果は、専門雑誌に掲載済みである。(Heim 氏との共同研究)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 B. Heim and A. Murase	4. 巻 89
2. 論文標題 Completely replicable functions and symmetries	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg	6. 最初と最後の頁 169-177
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12188-019-00212-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 B. Heim, C. Kaiser and A. Murase	4. 巻 29
2. 論文標題 Modular curves and symmetries of Hecke type	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1850045-1850050
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X18500453	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 A. Murase
2. 発表標題 Modular curves and symmetries of Hecke type
3. 学会等名 The 32nd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 A. Murase
2. 発表標題 Symmetries characterizing Borcherds products
3. 学会等名 The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ハイム ベルンハルト (HEIM Bernhard)	アーヘン工科大学・Faculty of Science	
研究協力者	菅野 孝史 (SUGANO Takashi)	金沢大学・理工研究域数物科学系・名誉教授	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Max-Planck Institute for Mathematics			
ドイツ	RWTH Aachen University			