

令和 6 年 5 月 17 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05187

研究課題名（和文）ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定まる2つの代数の森田同値性

研究課題名（英文）Morita equivalence for two algebras associated with dynamical Yang-Baxter maps

研究代表者

澁川 陽一（SHIBUKAWA, Youichi）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：90241299

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を利用して、一般の代数をbase ringとして持つホップ歪代数を構成した。その成果は論文誌Toyama Mathematical Journal (42, 2021, 51-72)に掲載されている。また、適切な性質をもつダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定義される反射方程式（reflection equation）の解を組織的に構成することにも成功した。この研究成果は論文誌Toyama Mathematical Journal (Volume 44, 2023)に掲載される予定である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究による成果の学術的意義は以下の通りである。(1) base ringが一般の場合に、ホップ歪代数を構成するための十分条件を明らかにした。(2) どんなテンソル圏に対しても適用可能であるような反射方程式の解の構成方法を提示した。(3) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定まる反射方程式の解を組織的に構成した。(4) クイパー（quiver）のなすテンソル圏における反射方程式の解を構成した。

研究成果の概要（英文）：By means of dynamical Yang-Baxter maps, we constructed Hopf algebroids whose base rings are arbitrary algebras. This result is published in Toyama Mathematical Journal (42, 2021, 51-72). In addition, we succeeded to present a systematic method to construct solutions to the reflection equation associated with the dynamical Yang-Baxter map satisfying suitable conditions. This result will be published in Toyama Mathematical Journal (Volume 44, 2023).

研究分野：代数学

キーワード：ホップ歪代数 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

### 1. 研究開始当初の背景

量子ヤン・バクスター方程式やその解である R 行列は、数学および物理学に幅広い応用をもつ。研究代表者は、数年来、この量子ヤン・バクスター方程式を通じて可積分系に埋め込まれている代数構造を解明することと同時に、その代数学への応用を目指すべく、量子ヤン・バクスター方程式および関連する代数構造を一般化する研究に取り組んでいる。既存の量子群や可積分系など、量子ヤン・バクスター方程式の現れる分野をより深く理解しながら、新たな数学・物理学上の研究対象を提供することが目標である。

研究代表者が研究しているダイナミカル・ヤン・バクスター写像は、Drinfeld により導入されたヤン・バクスター写像を一般化したものである。成分を入れ替える写像  $P(P(u,v)=(v,u)(u,v-V))$  がヤン・バクスター写像の典型例である。

この写像 P から、双代数 (bialgebra) である一般線型群  $GL_n$  の座標環  $A(GL_n)$  を構成することができる。まず、 $V$  を  $n$  次元ベクトル空間とする。写像 P を  $V \times V$  から  $V$  のテンソル積上への写像と見なすと双線型写像となることから、写像 P を  $V$  のテンソル積上の線型写像と考える。この線型写像 P を、 $V$  の標準的な基底  $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  を用いて行列表示する。その係数  $P^{ij}_{kl}$  は、 $P(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$  であることから、 $P^{ij}_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk}$  となる ( $\delta_{il}$  はクロネッカーのデルタ記号)。すなわち、 $i=l$  かつ  $j=k$  のときのみ  $P^{ij}_{kl}$  は 1 となり、それ以外はすべて 0 となる。

座標環  $A(GL_n)$  が可換環であることから、その生成元  $L_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) は、それらが可換であることを意味する式  $L_{ij}L_{kl} = L_{kl}L_{ij}$  を満たす。 $P^{ij}_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk}$  であることから、座標環  $A(GL_n)$  で成り立つ最も基本的な関係式  $L_{ij}L_{kl} = L_{kl}L_{ij}$  は、 $\sum_{s,t} P^{ik}_{st} L_{tj} L_{sl} = \sum_{s,t} P^{st}_{lj} L_{kt} L_{is}$  と書き換えられる。

この関係式を通じて、ヤン・バクスター写像 P が双代数である座標環  $A(GL_n)$  を決定していることを見出すことができる。

上の写像 P をダイナミカル・ヤン・バクスター写像に一般化することにより、研究代表者らは双代数の一般化である左双亜代数 (left bialgebroid) の構成方法を提示した。また、この左双亜代数の特別な表現であるダイナミカル表現全体がテンソル圏をなすことも示した。

さらに研究代表者は事前研究を行って、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から面型ヤン・バクスター方程式の解を導いた。

面型ヤン・バクスター方程式の解から、面代数 (face algebra) と呼ばれる代数を定義することができる。この面代数は双代数の一般化である弱双代数 (weak bialgebra) となっており、ホップ代数の分野では大変よく応用されている。また、その表現のなすテンソル圏の性質も研究されている。

研究代表者による事前研究は、1 つのダイナミカル・ヤン・バクスター写像が左双亜代数と面代数という 2 つの代数を生み出すことを意味するので、これら 2 つの代数の表現の間にも何らかの関係があるはずである。

そこで、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定まる 2 つの代数の表現の関係を明らかにして、そのテンソル圏の同値性、すなわち、これら 2 つの代数の少し広い意味での森田同値性を証明しようという着想に至った。

### 2. 研究の目的

研究代表者の提示した新しい数学的对象であるダイナミカル・ヤン・バクスター写像は、左双亜代数および面代数を生み出すことができる。これは、研究代表者による事前研究で明らかにされた。

そこで本研究では、これら 2 つの代数の少し広い意味での森田同値性を明らかにすることを目的とする。すなわち、研究代表者らが構成した左双亜代数のダイナミカル表現全体のなすテンソル圏と、対応する面代数の表現全体のなすテンソル圏の間の圏同値を得ることを研究目的とする。

左双亜代数のダイナミカル表現全体のなすテンソル圏は、物理学の可積分系における L 作用素全体のなすテンソル圏と同型であるので、この点を通じ、本研究は数学のみならず物理学にも波及が見込まれる。

### 3. 研究の方法

本研究で取り扱える左双亜代数を幅広くするために、まず、

(1) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を利用した左双亜代数・ホップ亜代数の構成について研究した。

本研究課題の遂行中に発表された関連する結果などを参考にしながら引き続き研究を進めていたが、コロナ禍などの困難が生じたため、

(2) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定まる反射方程式の解の構成について研究した。この研究は、基盤研究(C) (一般) (2014~2016; 課題番号 26400031) から続くものである。

これらの研究を遂行するにあたり用いた方法は、以下の通りである。

(1) 研究代表者によるダイナミカル・ヤン・バクスター写像を利用した左双歪代数の構成方法を一般化する。

(2) De Commer によるヤン・バクスター写像に付随した反射方程式の解の構成方法を、テンソル圏上での構成方法に一般化する。

(3) 上記(2)で得られるテンソル圏上での反射方程式の解の構成方法をダイナミカル・ヤン・バクスター写像に適用し、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定まる反射方程式の解を構成する。

#### 4. 研究成果

本研究の主な成果は以下の通りである。

(1) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を利用して、ホップ歪代数を構成することに成功した。これは、研究代表者によるダイナミカル・ヤン・バクスター写像を利用した左双歪代数の構成方法を一般化したもので、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の満たす性質を抽象して得られる base ring の元からホップ歪代数を構成したものである。フロベニウス代数 (Frobenius algebra) ではない代数を用いて、先述の base ring の例を与えた。これにより、弱ホップ代数 (weak Hopf algebra) とならないような、真のホップ歪代数の例が構成できたことになる。

(2) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定義される反射方程式の解を組織的に構成することに成功した。まず、De Commer によるヤン・バクスター写像に付随した反射方程式の解の構成方法を、テンソル圏上での構成方法に一般化した。この構成方法を、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が射 (morphism) として属しているテンソル圏に適用した。これにより、群から定まるダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定義される反射方程式の解であるダイナミカル・リフレクション写像 (dynamical reflection map) を組織的に構成することに成功した。具体的には、群の準同型写像の族と圏論的な意味での加群から、ダイナミカル・リフレクション写像が構成できることを示した。この構成方法が比較的簡潔であることから、様々な例を構成することに成功した。De Commer による論文では示されていない例も構成している。加えて、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が射として属しているテンソル圏がクイバー (quiver) のなすテンソル圏の一部と圏同値であることを用いて、クイバーのなすテンソル圏におけるヤン・バクスター方程式の解に付随して定義される反射方程式の解を構成することにも成功している。

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する反射方程式の研究は、基盤研究(C)(一般) 2014～2016; 課題番号 26400031) から続くものである。本研究では主にその数学的側面を研究したが、以前に得られた成果と合わせることで、今後は物理学への応用も図っていきたいと考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Otsuto Yudai, Shibukawa Youichi	4. 巻 42
2. 論文標題 FRT construction of Hopf algebroids	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Toyama mathematical journal	6. 最初と最後の頁 51~72
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.15099/00021653	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ashikaga Ryosuke, Shibukawa Youichi	4. 巻 44
2. 論文標題 Dynamical reflection maps	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Toyama mathematical journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 澁川陽一, 乙戸勇大
2. 発表標題 ホップ亜代数のFRT構成法
3. 学会等名 2021日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 澁川陽一
2. 発表標題 ヤン・バクスター方程式からホップ亜代数へ
3. 学会等名 第63回代数シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------