様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 5 年　 6 月　 1 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2022
課題番号：１７Ｋ０５１８８

研究課題名（和文）アーベル多様体のモジュライの整数環上のコンパクト化

研究課題名（英文）Compactification of the moduli of abelian varieties over an integer ring

研究代表者
中村　郁（Nakamura，Iku）

北海道大学・理学研究院・名誉教授

研究者番号：５００２２６８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：完備離散付値環上のアーベル多様体G_{η}に対してネロン・モデルが一意に定まることはよく知られている。このネロン・モデル$\cG$ のコンパクト化を研究した。主要結果は以下のとおりである：$\cG$が半安定ならば、$\cG$のコンパクト化$(P,\cN)$で次の性質(i)-(iii)を持つものがただ一つ存在する：(i) 偏極$\cN$が$\cG$上3次的でG_{η}上では$\cL_\eta$の整数倍 (ii) Cohen-Macaulayスキームで、(iii) $P\setminus\cG$が余次元2。
$\cG$の退化データを構成しコンパクト化を構成、具体的に記述した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数体上で定義されたアーベル多様体は、一次元の楕円曲線の場合を含め、研究対象として興味深い。その基本的な研究手段として、代数体の整数環上に延長された極小モデル、あるいは、ネロン・モデルは大切である。とりわけ、アーベル多様体の退化する素点（以下、悪い素点という）での振る舞いは重要な情報を与える。ネロン・モデルの自然なコンパクト化は、その情報を得るための一つの有効な手段になると期待される。

研究成果の概要（英文）：Any abelian variety $(G_{\eta},\cL{\eta})$ over a complete discrete valuation ring has a unique N\'eron model $\cG$. Our main result is stated as follows: if $\cG$ is semi-abelian, then there exists a unique relative compactification $(P,\cN)$ such that (i) $\cN$ is a polarization of $\cG$ extending the n-th tensor of $\cL_{\eta}$ for some n with $\cN_{\cG}$ cubical, (ii) P is Cohen-Macaulay, (iii) $P\setminus\cG$ is of codimension at least two.

研究分野：代数幾何学

キーワード：アーベル多様体　モジュライ　コンパクト化　アーベル多様体の退化　ネロン・モデル　ネロン・モデルのコンパクト化　ボロノイ多面体

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化は悪い素点を除いた整数環$¥bZ[¥zeta_N,1/N]$上で構成されている（Nakamura Inv. Math.1999）。ただし、$¥zeta_N$は1の原始N乗根を表す。本研究の当初の目標はこれを整数環$¥bZ[¥zeta_N]$上に延長することであり、その研究は現在も継続中であるが、その研究の過程でネロン・モデルのコンパクト化に急速な進展があり、議論の多くがモジュライ空間のコンパクト化と共通することから、ネロン・モデルのコンパクト化を進めることとした。　完備離散付値環上のアーベル多様体$G_{¥eta}$に対してネロン・モデルが一意に定まることはよく知られている。アーベル多様体の退化の一つとして、ネロン・モデルのコンパクト化がある。ネロン・モデルの連結成分のコンパクト化はすでに[1]Alexeev-Nakamura(Tohoku Jour. 1999)によって知られている。またネロン・モデルの（特異点のない）コンパクト化の存在は[2] K¥"unnermann (Duke Jour. 1998)によってすでに知られているが、一意性が成り立つコンパクト化の存在は知られていなかった。なお、出版年は前後しているが、論文としては[2]より[1]のほうが先である。

２．研究の目的

以上の経緯から、この研究では単にネロン・モデルのコンパクト化の存在だけでなく、良いコンパクト化の構成を目指す。よいコンパクト化の定義は研究の開始時点では特定するのは難しいが、研究の結果、良いコンパクト化は（特異点を持つが）存在し、しかもただ一つ存在することが証明できた。むしろ、この一意性によって、良いコンパクト化であることが示されている、と考えるべきであろう。なお、我々の得たコンパクト化は、一般には特異点を持つが、代数幾何学の一般的な現象、例えば、極小モデル理論の結論などと比較しても、一意性を持つ場合に、コンパクト化の特異点の存在は避けられない。

３．研究の方法

Mumford 構成と呼ばれる、この方面ではよく知られた構成方法がある。この構成方法を適用するには、$(G_{\eta},\cL_{\eta})$の退化データが必要である。退化データは半安定な$(G_{\eta},\cL_{\eta})$に対しては構成出来ることが知られている。複素数体上では、退化データはテータ級数の展開係数に他ならない。ネロン・モデル$\cG$ のコンパクト化が満たすべき理想的な条件がすべて成立すると仮定すると、最初に与えられた$(G_{\eta},\cL_{\eta})$の退化データから、ネロン・モデル$\cG$ の退化データが一意的に定まり、具体的に求めることができる。この退化データに、Mumford 構成の方法を適用してコンパクト化を構成する。退化が完全退化の場合はこの方法で比較的簡単に済むが、部分退化の場合の$\cG$ の退化データは論文の第2部部分（Nakamura 単著）で構成する。

４．研究成果

(4-1) 主要結果は以下のとおりである：$\cG$が半安定ならば、
$\cG$のコンパクト化$(P,\cN)$で次の性質(i)-(iii)を持つものがただ一つ存在する：
(i) 偏極$\cN$が$\cG$上3次的でG_{η}上では$\cL_\eta$の正の整数倍、
(ii) PはCohen-Macaulay スキームで、(iii) $P\setminus\cG$が余次元2。
　また、Pの構造はボロノイ多面体（による分割）で記述される。

(4-2) 以下、より詳細に述べる：
論文[1]で採用した無限生成代数は
$\cR=R[a(x)w^x\vartheta; x\in X]$という簡明な形をとる。
ただし、Xは階数有限の自由$\bZ$加群、$a(x)$は退化データの一部、ϑは不定元を表す。ここで、無限和
$\vartheta_0:=\sum_{x\in X}a(x)w^x$はアーベル多様体のテータ関数に対応する。
この代数はテータ関数の定めるアーベル多様体上の豊富な線束$\cL$を表すと言ってよい。このモデルからネロン・モデル$\cG$を構成するために、まず、見かけの線束の積
$\cL^{\dagger}:=(\prod_{u\in\Phi}\delta_u^*\cL)^{\otimes 2}$
を考える。ただし、Φは$\cG_0$の連結成分の群、δ_uは$u\in\Phi$による平行移動を表す。
　次に、この線束$\cL^{\dagger}$を実現する無限生成代数$\cR^{\dagger}$を構成する。この代数$\cR^{\dagger}$は$\cL_{\eta}$の正の整数べき$\cL_{\eta}^{\otimes n}$ごとに一つ、したがって無限個構成され、そのひとつ一つに対してネロン・モデルのコンパクト化が得られる。し

かし、構成されたコンパクト化は、スキームとしてはすべて同型であることが分かる。

(4-3) コンパクト化の閉ファイバーP_0の既約成分はすべて同型で、P_0は以下のボロノイ多面体（による分割）によって記述される：
$$\Sigma(0)=\{x\in X\otimes_{\bZ} \bR; B(x-y,x-y)\geq B(x,x)
(\forall y\in Y)\}.$$ ただし、YはXの有限指数の部分群、
Bはネロン・モデルのモノドロミー行列。論文[1]では、ボロノイ多面体（による分割）の代わりに、デロネ多面体（による分割）が現れていたのと対照的である。

(4-4) 現在準備中の論文は 2 部で構成され、前半は三井健太郎氏との共著、後半は Nakamura の単著である。前半は完全退化の場合に、後半は部分退化の場合に、ネロン・モデル$\cG$の退化データを構成しコンパクト化を構成する。後半では、さらに(4-1)に述べた主定理を改良して、完備離散付値環だけでなく、より一般に、Dedekind 環の上でも成立することを証明する。その結果、代数体の整数環上に定義された半安定なネロン・モデル$\cG$は、同じ環上にコンパクト化を持つ。前半は完成しており、後半は現在執筆中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 A. Ishii and I. Nakamura	４．巻 70-(2)
２．論文標題 The extended McKay correpodence for quotient surface singularities	５．発行年 2019年
３．雑誌名 The Quaterly Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 395-408
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/qmath/hay047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 中村　郁
２．発表標題 Relative compactification of semistable Neron models
３．学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Iku Nakamura
２．発表標題 Relative compactification of semistable Neron models
３．学会等名 Toric geometry, degeneration and related topics（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 中村　郁
２．発表標題 Katz Mazur moduli of elliptic curves
３．学会等名 北海道教育大学代数セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

中村郁のホームページ または http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nakamura

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関