様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ０５１９７

研究課題名（和文）射影多様体の埋め込みの構造と定義イデアルおよびm-射影正規性

研究課題名（英文）The embedding structure, defining ideals and the projective m-normality of projective varieties

研究代表者

野間　淳（Noma, Atsushi）

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：９０２６２４０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：余次元eの射影多様体の一般のe-1点が張る線形部分空間からの線形射影が，同型とならない点集合は因子になり，それを二重点因子と呼ぶ．また，点からの線形射影が射影多様体と像の非双有理のとき，射影の中心点を非双有理中心点と呼ぶ．射影多様体の外にある非双有理中心点の集合を外セグレローカス，多様体の非特異点である非双有理中心点の集合を内セグレローカスと呼ぶ．本研究で次の結果を得た．第一に，非特異とは限らない射影多様体に対して，二重点因子の成す線形束の基点は，特異点の集合か内セグレローカスに含まれることを証明した．第二に，外内セグレローカスの既約成分の数の上限を，射影多様体の次数，次元，余次元で与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究で得られた結果，射影多様体の定義方程式を線形射影によって与える方法，セグレローカスの構造，２重点因子の豊富性は，射影代数幾何の観点から興味深いのみならず，今後の応用も期待でき，さらには解決の見通しの立っていないregularity予想の状況証拠や解決への糸口としても意義があると考えられる．これらの研究は，計算代数や計算代数幾何などへの応用が今後期待される．

研究成果の概要（英文）：We studied the relation between the embedding structure of projective varieties and their defining ideal. For a projective variety, its double point divisor is the nonisomorphic locus of the variety by the inner projection from the linear subspace spanned by its general (e-1)-points to its image. On the other hand, a nonbirational center of a projective variety is a point from which the variety is projected nonisomorphically. The locus of nonbirational centers off the variety (resp. on its smooth locus) is called outer (resp. Inner) Segre locus of the variety. We get the following two results. The first result is to show that the linear subsystem consisting of double point divisors of a projective variety has the base points in the singular locus or the inner Segre locus of the variety. The second result is to give upper bounds of the number of irreducible components of the Segre locus of a projective variety by its degree, dimension and codimension.

研究分野：代数幾何学

キーワード：射影多様体　射影埋め込み　線形射影　定義イデアル　二重点因子

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

射影多様体の**CM正則性(Castelnuovo-Mumfordregularity)**は，幾何的には，射影空間の超曲面束が，どのくらいの次数で，射影多様体上の完備な線形束を誘導するかを表す量であり，代数的には，射影空間内での定義方程式の次数やその関係式であるsyzygiesの次数の上限を示す量で，射影多様体の幾何的な側面と代数的な側面を結びつける重要な不変量の一つである．ここで，N次元射影空間内の射影多様体Xが**m-正則(m-regular)**であるとは次が成立することである：

$(\mathbf{C}_m)$「全ての$i > 0$に対して，$H^i(\mathbb{P}^N, \mathscr{I}_X \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(m-i)) = 0$」（$\mathscr{I}_X$は$X \subseteq \mathbb{P}^N$のイデアル層）

この条件$(\mathbf{C}_m)$が成立する最小のmをXの**regularity**と呼ぶ．これは定義イデアルの自由分解やイニシャルイデアルからも計算される重要な不変量である．この不変量について，regularity予想（Eisenbud-Goto予想）「どんな超平面にも含まれない射影多様体$X \subseteq \mathbb{P}^N$は$(\mathbf{C}_{d-e+1})$を満たす（ただし，$d = \deg X, n = \dim X, e = N - n$）」がある．この予想は代数曲線の場合[Gruson-Lazarsfeld-Peskine1983]や非特異複素代数曲面の場合[Lazarsfeld1987]，特別な場合の成立が示されているが，一般の場合には未解決であったが，最近，この予想の反例が[Mccullough-Peeva2018]により提示され，今後この方面の研究が活発化する気配であった．その反例は悪い特異点を持つため，非特異やそれに近い場合には，予想は成立するであろうと考えられている．

これらの状況のもと，本研究課題の研究代表者は，$(\mathbf{C}_m)$に関連する次の条件にも注目してきた．

$(\mathbf{A}_m)$「Xに含まれない直線LとXとの交わりの長さはm以下である」

$(\mathbf{B}_m)$「Xは，Xを含む次数m以下の超曲面の（集合/スキーム/イデアル的）共通部分である」

$(\mathbf{D}_m)$「m次以上の超曲面が作る線形束はX上で完備である」

$(\mathbf{E}_m)$「構造層$\mathscr{O}_X$はm-正則，すなわち，全ての$i > 0$に対して，$H^i(X, \mathscr{O}_X(m-i)) = 0$」

これらについては，Castelnuovo-Mumfordの一般論により，

$$(\mathbf{C}_m) \Rightarrow (\mathbf{B}_m) \Rightarrow (\mathbf{A}_m), \quad (\mathbf{C}_m) \Leftrightarrow (\mathbf{D}_{m-1}) + (\mathbf{E}_{m-1})$$

が成立する．そのため，本研究課題の研究代表者はこれまでの研究において，予想$(\mathbf{C}_{d-e+1})$に対する確証をつかみ，$d - e + 1$がどのような意味を持つか知るため，$(\mathbf{A}_{d-e+1}), (\mathbf{B}_{d-e+1}), (\mathbf{D}_{d-e}), (\mathbf{E}_{d-e})$の解明をめざし研究を進めてきた．$(\mathbf{A}_{d-e+1})$については，先行研究[Bertin2002]，[Kwak2005]のもと，[Noma2015]で，Cohen-Macaulay的Xに対し$(\mathbf{A}_{d-e+1})$が成立すること，切断種数$g \leq e - 2$のとき$(\mathbf{A}_{d-e+1-g})$が成立することを示した．しかし，非Cohen-Macaulay的な一般の場合は未解決であり，より強い$(\mathbf{B}_{d-e+1})$の証明が期待される．$(\mathbf{B}_{d-e+1})$については，先行研究[Mumford1970]のもと，[Noma2010]で，射影多様体の内点からの線形射影により超曲面を構成する方法で研究してきた．そこでは，点を中心とする線形射影で，射影多様体Xとその像の間の非双有理写像となるときの**非双有理射影**，その中心点である**非双有理中心点**，さらに，Xに含まれない非双有理中心点の集合である**外セグレローカス**$\mathscr{B}(X)$，Xの非特異点である非双有理中心点の集合である**内セグレローカス**$\mathscr{C}(X)$が重要な役割を果たした．$\mathscr{B}(X)$は，射影幾何の立場から[B.Segre1936]や[Calabri-Ciliberto2001]で研究されたが，[Noma2010]により，「射影多様体Xの内点からの線形射影を用いて構成された超曲面は次数$d - e + 1$以

下で，その共通部分は，集合としてXと$\mathscr{B}(X)$の共通部分となり，スキームとしては，$\mathscr{B}(X)$と$\mathscr{C}(X)$と$\mathrm{Sing}\,X$の外では一致する」ことが分かったので，「$\mathscr{B}(X)$や$\mathscr{C}(X)$をもつ射影多様体の特徴付け」や「$\mathscr{B}(X)$や$\mathscr{C}(X)$をXから分離する超曲面をどのように探すか」が次の研究課題となっていた．つづく研究により，前者に対しては，特徴付けが得られ，後者に対しては，[Noma2016a]で$\dim \mathscr{C}(X) \geq 1$となる非特異な多様体$X$に対し$X$を分離する超曲面を構成した．特異点を持つ一般の場合は，特異点のまわりの局所的な定義方程式を線形射影により構成する方法が非特異の場合のように機能せず，研究が進んでいなかった．他方で，$(\mathbf{E}_{d-e})$が非特異なXに対して成立することを，[Noma2016b]で二重点因子の豊富性の応用として小平消滅定理を使って証明していた．これにより，$(\mathbf{C}_{d-e+1})$のためには，$(\mathbf{D}_{d-e})$の研究が重要であると考えられていた．

２．研究の目的

本研究の目的は，研究背景で述べたように，これまでの研究からその重要性が明らかになった，射影多様体の２重点因子の構造，そして並行して，セグレローカス$\mathscr{B}(X)$や$\mathscr{C}(X)$を持つ射影多様体を詳しく調べることである．これらを通して，$(\mathbf{A}_{d-e+1})$, $(\mathbf{B}_{d-e+1})$, $(\mathbf{D}_{d-e})$, $(\mathbf{E}_{d-e})$が成立することを示すことと共に，射影多様体の埋め込みの構造を解明し新たな視点を導入することを目指す．

３．研究の方法

次の点について重点をおき研究をおこなった．

(1) 線形射影の間の双対性

特異点を持つ射影多様体とその線形射影像の間の双対性を調べることで，特異点を持つ射影多様体の２重点因子を精密に構成すること．これを利用して，２重点因子の豊富性を調べること．

(2) 射影多様体を分離する超曲面の構成

射影多様体を含む超曲面を内点からの線形射影によって構成する方法を既に考察していたが，これをつづけて，内点からの線形射影によりセグレローカスとそれ以外の点がどのように写像されるかをさらに詳しく調べること．具体的な計算可能な例を作成して調べること．

(3)セグレローカスを持つ射影多様体の特徴づけ

セグレローカスを持つn次元射影多様体は強い特徴を持つと考えられる．特に複数の既約成分があるセグレローカスをもつ射影多様体の構成について考察すること．本研究課題の研究代表者のこれまでの研究課題で，$\mathscr{B}(X)$として1次元以上の線形部分空間を2つ持つ射影多様体の構成はできているので，その特徴づけについても考察すること．

(4)セグレローカスを射影多様体から分離する射影空間の超曲面の構成

セグレローカスを持つn次元射影多様体は，その一つの既約成分の線形部分空間を頂点とする$(n+1)$次元の錐に含まれることがわかっている．そこで，その錐から射影多様体を分離する超曲面の構成について考察すること．

４．研究成果

(1) 特異点を持つ射影多様体に対する，内点からの線形射影の２重点因子

非特異とは限らない一般の射影多様体に対する内点からの線形射影の２重点因子に関して，次の結果が得られた．**第1に**，射影多様体の間の余次元1で有限な射に対する双対性を，射影多様体が非特異の仮定をS_2条件にゆるめて証明した．**第2に**，この双対性を用いて，曲線上のスクロールと2次ベロネーゼ曲面

上の錐体以外の射影多様体に対して，一般の内点からの線形射影の2重点因子が作る線形束の基点は，もしあれば，特異点の集合か$\mathscr{C}(X)$に含まれることを証明した．その応用として，**第3に**，一般の内点からの線形射影の2重点因子が自明となる射影多様体と次数d,次元n,余次元eが$d-e-1<n$を満たす射影多様体の特徴付けを与えた．
(2)セグレローカスの既約の成分個数の上限
外と内のセグレローカスの既約成分数の上限を与える結果を得た．非双有理点からの線形射影の写像度-1に余次元-1を掛けた数を**指数**と呼ぶ．**第1に，**射影曲線に対して，外と内のセグレローカスは有限集合であることがこれまでの研究でわかっていたので，これらの点の個数$|\mathscr{B}(X)|$，$|\mathscr{C}(X)|$，次数d，余次元e，算術種数p_aの間には，不等式$(e-2)|\mathscr{B}(X)|+(e-1)|\mathscr{C}(X)| \le (1/2)\big((d-e)(d-e-1)-2p_a\big)$が成立することを線形射影の2重点因子を調べることにより示した．実際は，セグレローカスの点の指数の総和の上限を，線形射影の2重点因子の次数，曲線の次数と余次元，算術種数によって与えた．**第2に，**Roth多様体を除く非特異射影多様体に対して，外と内のセグレローカスは有限集合であることがわかっているが，第1の方法と同様に線形射影の2重点因子を調べることにより，そのうちの内点の数の上限を次数dと余次元eを含む双対層ω_X°に関する交点数で与えた．さらに，(1)の結果と過剰交点の計算を使って，孤立特異点のみを持ち双対層が可逆的な射影多様体に対して，内セグレローカスの既約成分数の上限が，次元n,次数d,余次元eを含む交点数$(\omega_X^{\circ\vee}\otimes\mathscr{O}_X(d-n-1))^n-e^{n-1}(de+n)$であることを示した．**第3に，**一般の$n$次元射影多様体$X\subseteq\mathbb{P}^N$に対して，第1，2とは別の方法によって，外と内のセグレローカスの既約成分に対する指数の総和の上限を次数d，次元n，余次元eによって定まる式で与えた．これにより，外と内のセグレローカスの既約成分の個数の上限は$((d+1)^N-e^N-d(d+1)^n)/(e-1)$であることを示した．その証明方法は，$X$を含みセグレローカスに沿って重複度が指数以上の特異点をもつ超曲面を構成すること，さらに過剰交点数の理論をこの場合に応用することからなる．この過程で得られた手法の応用は今後の研究課題である．
ここで得られたセグレローカスの既約成分の個数の上限が，実際の場合に最適であるかどうかの検証と更なる改良の検討は，今後の研究課題である．
(3)曲線上のスクロールについてのセグレローカスの研究
曲線上のスクロールは，構造が分かり易い多様体であり，さらに２重点因子の観点からも特別な多様体の一つである．これまで，そのセグレローカスの研究をおこなってきたが，再検討した．これまで，余次元2の頂点集合を持つ錐体ではなく特異点集合が余次元２以上であるような曲線上のスクロールは，セグレローカスが空集合であることが得られていた．さらに，曲線上のスクロールが，余次元2の頂点集合を持つ錐体であるか，特異点集合が余次元１である場合には，セグレローカスが空集合でない例の存在も得られていた．本研究において，これらについて，具体的に定義方程式を与えることができた．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Atsushi Noma	４．巻 370
２．論文標題 Projective varieties with nonbirational linear projections and applications	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 2299-2320
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7086	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Atsushi Noma	４．巻 504
２．論文標題 Base-point-freeness of double-point divisors of smooth birational-divisors on conical rational scrolls	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Algebra	６．最初と最後の頁 39-53
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2018.01.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　4件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 射影多様体の点射影が像と非双有理となる中心点の集合について
３．学会等名 熊本大学代数幾何セミナー（熊本大学）（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 射影多様体の点射影が像と非双有理となる中心点の集合について
３．学会等名 都の西北 代数幾何学シンポジウム2019（早稲田大学理工学部）（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 非特異射影曲線の非双有理線形射影中心点の上限について
３．学会等名 特異点セミナー，日本大学文理学部
４．発表年 2018年

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 射影多様体の非双有理中心点集合の既約成分の個数の上限
３．学会等名 特異点セミナー，日本大学文理学部
４．発表年 2018年

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 非特異射影多様体の非双有理射影中心内点の数の上限
３．学会等名 研究集会　射影多様体の幾何とその周辺２０１８，高知工科大学永国寺キャンパス（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 Generic inner projections of projective varieties
３．学会等名 第５回代数幾何学研究集会－宇部－，宇部高等専門学校（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 野間　淳
２．発表標題 Double-point divisors for generic inner projections of projective varieties
３．学会等名 特異点セミナー，日本大学文理学部
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関