

令和 2 年 7 月 3 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05198

研究課題名(和文) 開代数曲面と正規代数曲面の研究

研究課題名(英文) Research on open algebraic surfaces and normal algebraic surfaces

研究代表者

小島 秀雄 (KOJIMA, Hideo)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：90332824

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：開代数曲面、正規射影代数曲面、および多項式環上の導分の核について研究した。対数的小平次元が0で不足数が1以下となる開代数曲面を分類した。そして補集合の対数的小平次元が0以下となるアフィン平面曲線を任意標数で分類し、有理対数的標準特異点のみを持つピカル数1の正規デルペッツ曲面に含まれる川又対数的端末特異点でない特異点の個数は1以下であることを証明した。また、 \mathbb{Q} ホモロジー射影平面内の補集合の対数的小平次元が $-$ となる尖点有理曲線を分類し、アフィン平面を含むピカル数1の対数的デルペッツ曲面の構造を解明した。更に、標数0のUFD上の2変数多項式環における単項式導分の核として現れる部分環を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで、アフィン代数幾何学の研究は基礎体の標数が0となる場合が中心であり、正標数の場合の研究は殆ど進展していなかった。本研究で得られた成果により、正標数の開代数曲面の構造解明が進み、正標数のアフィン代数多様体の研究が進展する。また、小平次元0の射影代数多様体のクラスは楕円曲線等の重要な代数多様体を含んでおり、このことから対数的小平次元が0となる開代数曲面に関して本研究で得られた結果は様々な分野への応用が期待される。他に、多項式環の導分とその核に関する結果と整域上の多項式環の座標に関する結果も得たが、これらは多項式環の自己同型群を研究する上で重要になってくる。

研究成果の概要(英文)：I have studied open algebraic surfaces, normal projective surfaces and kernels of derivations on polynomial rings. I classified the open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero with defect ≥ 1 . And, I classified the affine plane curves whose complements have logarithmic Kodaira dimension ≤ 0 in any characteristic and proved that every normal del Pezzo surfaces of rank one with only rational log canonical singularities can have at most one non Kawamata log terminal singular points. I classified cuspidal rational curves on \mathbb{Q} -homology projective planes whose complements have logarithmic Kodaira dimension $-$ and determined the structure of log del Pezzo surfaces of rank one containing the affine plane. Moreover, I determined the kernels of monomial derivations on the polynomial ring in two variables over a UFD of characteristic zero.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学 開代数曲面 正規代数曲面 対数的小平次元 正規デルペッツ曲面 多項式環 導分

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 開代数曲面

開代数曲面の対数的小平次元による構造定理は基礎体の標数が 0 の場合は射影代数曲面の場合と類似の形で確立されている。この結果はアフィン代数多様体の研究で重要であり、現在もアフィン代数幾何学の中心的な研究課題に応用されている。研究代表者は正標数での開代数曲面の対数的小平次元による構造定理を確立するべく研究を進めており、対数的小平次元が 1 の場合には構造定理を確立し、そのような曲面の対数的多重種数に関する結果を得た。更に、対数的小平次元が 0 の非有理開代数曲面の構造を任意標数で解明し、非有理線織曲面の対数的小平次元と対数的多重種数の関係を明らかにした。しかしながら、対数的小平次元が 0 以下の場合には未だ部分的な結果しかなく、更に対数的小平次元が 0 の場合は標数 0 の場合でも完全には解明されていない。そのため、正標数のアフィン代数多様体の研究は標数 0 の場合に比べると殆ど進展していない。

(2) 正規代数曲面

近年、正標数の正規代数曲面の極小モデル理論が研究されており、曲面が有理特異点あるいは対数的末端特異点のみを持つ場合には極小モデル理論が構築された。次は、極小モデルの構造を調べることが必要になってくるが、非特異射影代数曲面の場合と比べて、特異点を持つ場合は格段に難しくなり、特殊な場合しか分かっていない。特に、ピカル数 1 の正規デルペッツォ曲面(反標準因子が豊富となる正規射影代数曲面)は標数 0 の場合でも完全には分かっていないが、このクラスの曲面は射影代数多様体のみならず開代数多様体を研究する上でも重要である。

(3) 多項式環の導分とその核

多項式環の導分と局所ベキ零導分、およびそれらの不変式環(以後、核と呼ぶ)はアフィン代数幾何学における中心的な研究対象であり、アフィン代数多様体の自己同型群や代数群の作用の研究に応用されている。標数 0 の体上の多項式環の導分の核については、研究成果は多くあるものの、局所ベキ零導分に比べると研究が進展しておらず、特に、体でない整域上の多項式環の導分による核の構造が完全には解明されていない。

2. 研究の目的

任意標数での対数的小平次元が 0 以下となる正規アフィン代数曲面の構造定理を正標数の場合にも確立し、その研究成果を用いて、任意標数での小平次元が 0 以下となる正規射影代数曲面の構造と対数的小平次元が 0 以下のアフィン代数多様体の研究に応用する。具体的には次の課題について研究を行う。

(1) 開代数曲面

正標数での対数的小平次元が 0 以下となる開代数曲面について、その無限遠境界の交叉行列が不定値とならない場合の構造を解明する。また、 \mathbb{Q} ホモロジー射影平面の非特異部分にある尖点有理曲線で、その曲線の補集合の対数的小平次元が 1 以下となるものを分類する。また、対数的小平次元が 2 となる場合にもそのような曲面と曲線の特異点を調べる。

(2) 正規射影曲面

開代数曲面の構造に関する結果を応用して、任意標数での小平次元が 0 以下の正規射影代数曲面の構造を解明する。特に、ピカル数 1 の正規デルペッツォ曲面の構造を解明する。

(3) 多項式環の導分とその核

アフィン代数曲面の構造解明に応用するために、2変数多項式環上の導分や高階導分で、その核の商体と有理関数体での核が等しくならぬものを分類する。

3. 研究の方法

開代数曲面、正規代数曲面、及び、多項式環上の導分とその核について、以下のようにして研究を遂行した。

(1) 開代数曲面

次のような流れで研究を遂行した。

1 開代数曲面について、開代数曲面の極小モデルプログラムを実行し、極小モデルを構成する。更に、その極小モデルから、川又対数的末端特異点につぶれない境界因子を除いた対数的代数曲面に対数的極小モデルプログラムを実行し、対数的極小モデルを構成する。このような流れを対数的小平次元が 0 以下で、無限遠境界因子の交叉行列が不定値にならないような開代数曲面に対して実行した。

2 1 で得られた対数的極小モデルを分類する。本研究では、対数的小平次元が 0 以下で不足数

が1以下となるものについて、研究を遂行した。ここでは、得られた対数的極小モデルがピカル数1の対数的デルペッツ曲面になる場合が難しくなるが、不足数の条件よりある程度構造を解明することができ、対数的小平次元が0の場合は部分的に分類することができた。

3 対数的極小モデルの分類結果や構造から、元の開代数曲面の構成方法と対数的多重種数を調べる。

(2) 正規代数曲面

主にピカル数が1となる正規デルペッツ曲面について、以下のようにして研究を遂行した。

1 ピカル数1の有理対数的標準特異点のみを持つ正規デルペッツ曲面について、その非特異部分に開代数曲面としての極小モデルプログラムを実行した。曲面が川又対数的端末特異点を持たない場合に、極小モデルとして現れる代数曲面の構造を調べた。

2 ピカル数1の対数的デルペッツ曲面について、その特異点のタイプを固定したときの構成方法を、De-Qi Zhang氏のピカル数1の対数的デルペッツ曲面に関する結果と対数的小平次元が $-$ となる開代数曲面の構造定理を用いて調べた。本研究では、その特異点のタイプが複素アフィン平面の極小コンパクト化で現れる場合について考察した。この特殊な場合でも、起こりうるタイプは無限個ある。

(3) 多項式環上の導分とその核

研究代表者が指導した元大学院生の長峰孝典氏(現小山高専)と北澤千秋氏(現新潟県高校教員)と共に、以下のような流れで研究を遂行した。

1 標数0の体上の2変数多項式環上の単項式導分(各不定元の像が単項式となる導分)を分類し、その核を決定する。核を決定する過程で、研究代表者と長峰氏によって得られた閉多項式の理論を適用した。

2 標数0の体上の2変数多項式環上の単項式導分で、その核の商体と有理関数体での核が等しくならぬものを分類する。

3 上記1、2の結果を標数0のUFD上の2変数多項式環の場合に拡張できるかどうか調べる。

4. 研究成果

本研究で得られた成果を研究の目的での項目毎に分けて書く。

(1) 開代数曲面

対数的小平次元が0の開代数曲面と \mathbb{Q} ホモロジー射影面上の尖点有理曲線に関して次のような成果を得た。

1 \mathbb{Q} ホモロジー射影平面 S で、その非特異部分に補集合の対数的小平次元が $-$ となる有理尖点曲線 C を持つものについて、 C の補集合 $S-C$ がアフィン直線と代数曲線の直積と同型となるZariski開集合を含まないものを全て決定した。これと、以前に得られていた結果を合わせて、論文として発表した。

2 非特異開代数曲面について、中山昇氏(京都大学)の研究を元に、不足数という概念を定義した。その完備化された射影代数曲面のピカル数に2を加えた数から無限遠境界の既約成分の個数を引いたものを不足数という。対数的小平次元が0となる開代数曲面について、その不足数が0以上になることを証明し、不足数が0になる場合を決定した。この結果については本研究課題の開始前から研究を遂行しており、部分的な結果は得られていた。今回、更に、不足数が1で対数的幾何種数が0になる場合も決定した。これらの結果の応用として、アフィン平面曲線で補集合の対数的小平次元が0以下となるものを任意標数で分類した。これらの結果を合わせて、論文として発表した。

3 Gene Freudenburg氏(西ミシガン大学(アメリカ))と長峰孝典氏と共同で、座標環がUFDで単元群が自明となる非特異アフィン代数曲面について共同研究を行い、そのような曲面で対数的小平次元が0になるものを無限個構成した。更に、構成した曲面の自己同型群を調べた。この結果については、ArXivにプレプリントを発表した。現在その結果を改良するために共同研究を続けており、近いうちに学術雑誌に投稿する予定である。

(2) 正規代数曲面

本研究では、ピカル数1の正規デルペッツ曲面の研究が進展し、次のような成果を得た。

1 高橋剛氏(新潟大学)と共同で巡回型でない商特異点を持つピカル数1の対数的デルペッツ曲面について研究した。以前、研究代表者はそのような代数曲面が複素アフィン平面を含むときに起こりうる特異点のタイプを分類したが、今回、ピカル数1の対数的デルペッツ曲面の特異点のタイプがその分類されたリストのどれかになっているとき、その代数曲面は複素アフィン平面を含むことを示した。この結果について、論文として発表した。

2 有理対数的標準特異点のみを持つピカール数 1 の正規デルペッツ曲面は川又対数的端末特異点でない特異点を高々 1 個しか持たないことを示した。この結果の証明では対数的小平次元が $-$ の開代数曲面の構造に関する結果等の代数曲面の初等的な結果だけを用い、消滅定理を用いずに証明することができたため、任意標数で成り立つ。この結果について、論文として発表した。

(3) 多項式環上の導分とその核

標数 0 の UFD 上の 2 変数多項式環の単項式導分 (各不定元の像が単項式となる導分) について、それが定数でない多項式を核に持つ場合を分類し、その核を決定した。更に、標数 0 の 2 変数多項式環上の単項式導分で、その核と有理関数体での導分の核が等しくないものを決定した。これらの結果は、整域上の多項式環の座標に関する結果等を合わせて、論文として発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|---------------------|
| 1. 著者名 Hideo Kojima | 4. 巻 29 |
| 2. 論文標題 Rational unicuspidal curves on Q -homology projective planes whose complements have logarithmic Kodaira dimension - | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Nihonkai Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 29-43 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|----------------------|
| 1. 著者名 Hideo Kojima, Takeshi Takahashi | 4. 巻 29 |
| 2. 論文標題 Log del Pezzo surfaces of rank one containing the affine plane | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Nihonkai Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 77-130 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Chiaki Kitazawa, Hideo Kojima, Takanori Nagamine | 4. 巻 533 |
| 2. 論文標題 Closed polynomials and their applications for computations of kernels of monomial derivations | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Algebra | 6. 最初と最後の頁 266-282 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2019.06.001 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Hideo Kojima | 4. 巻 547 |
| 2. 論文標題 Some results on open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Algebra | 6. 最初と最後の頁 238-261 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.11.021 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Hideo Kojima | 4. 巻 319 |
| 2. 論文標題 Singularities of normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics book series | 6. 最初と最後の頁 199-208 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 9件)

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Logarithmic plurigenera of smooth affine surfaces |
| 3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Some results on open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero |
| 3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2019 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Closed polynomials over integral domains |
| 3. 学会等名 The 1st Asian International Conference in Science (UTAR, NU, and CYCU) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Rational open surfaces of log Kodaira dimension 1 |
| 3. 学会等名 RIMS Symposia: Rational points on higher dimensional varieties (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Logarithmic plurigenera of smooth affine surfaces |
| 3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Some results on open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero |
| 3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2019 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Rational open surfaces of log Kodaira dimension 1 |
| 3. 学会等名 RIMS Symposia: Rational points on higher dimensional varieties (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one |
| 3. 学会等名 Algebraic Geometry - Mariusz Koras in memoriam (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 小島秀雄 |
| 2. 発表標題 2変数多項式環上の単項式導分の核について |
| 3. 学会等名 第92回米沢数学セミナー「可換Banach環と関連分野研究集会」 |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 小島秀雄 |
| 2. 発表標題 Normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one |
| 3. 学会等名 代数学ミニシンポジウム2018 |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|-----------------------------------|
| 1. 発表者名 小島秀雄 |
| 2. 発表標題 対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面について |
| 3. 学会等名 第62回代数学シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|------------------------------------|
| 1. 発表者名 小島秀雄 |
| 2. 発表標題 Qホモロジー射影平面上の単尖点有理曲線について |
| 3. 学会等名 代数学ミニシンポジウム2017 |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hideo Kojima |
| 2. 発表標題 Complements of plane curves with logarithmic Kodaira dimension zero |
| 3. 学会等名 Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|----------------------------------|-----------------------|----|
| 研究協力者 | 高橋 剛 (TAKAHASHI Takeshi) | | |
| 研究協力者 | 長峰 孝典 (NAGAMINE Takanori) | | |