

令和 3 年 6 月 9 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05203

研究課題名(和文) 標準加群と  $n$  標準加群の研究研究課題名(英文) Studies on canonical and  $n$ -canonical modules

研究代表者

橋本 光靖 (Hashimoto, Mitsuyasu)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10208465

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：標準加群と  $n$  標準加群の振る舞いについて調べた。射の分岐跡についての Zariski-Nagata の定理について、体上のスキームであるなど、マイルドな仮定の下に擬有限性の仮定を外すことに成功した。証明には  $D$  加群やその類似物を用いている。この事実はアフィン  $n$  空間のエタールな自己射が(標数 0 では) 同型であろう、というヤコビアン予想へのアプローチとして期待が持てる。また、標準加群に関する研究は Cohen-Maculay 環と Gorenstein 環の中間の存在である almost Gorenstein ring の研究には標準加群を調べることに応用可能である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

標準加群やその類似物の研究は可換環論・代数幾何学の進歩のために必要である。ヤコビアン予想はアメリカ数学会の分類表においてもひとつのテーマとして掲げられるほどに重要なアフィン代数幾何学上の懸案であり、その解決は待ち望まれており、学術的意義は高い。この問題の解決に資すると思われることが今回証明できた。純粋数学の問題であり、直接の社会的意義は無い。

研究成果の概要(英文)：We studied on canonical and  $n$ -canonical modules. We have succeeded in removing the extra hypothesis of the quasi-finiteness under mild conditions that the schemes in problem are over some fields. In the proof of the theorem, we have used  $D$ -modules and their relatives. The theorem is expected to be applicable to the study of Jacobian Conjecture which asserts that an etale endomorphism of an affine  $n$ -space over a field of characteristic zero is an isomorphism. Moreover, the study on canonical modules will be applicable to the study on almost Gorenstein property, which lies between the Cohen-Macaulay property and the Gorenstein property.

研究分野：代数学

キーワード：標準加群  $n$  標準加群 ヤコビアン予想 Zariski-Nagata の定理

## 1. 研究開始当初の背景

ネーター局所環を主な研究対象とする可換環論において、極めて幾何的な色彩の濃い正則局所環という性質が大域次元が有限、というホモロジー代数的な特徴づけを持つ、という Serre の定理はひとつの大きな転機であった。以後、代数幾何的な性質、イデアル論的な性質、ホモロジー代数的な性質を結びつける現代的可換環論が発展していった。その中で、Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性は中心的課題であり、一般論が整備され、面白い例も調べられ、代数幾何学的な側面だけでなく、組合せ論との関係、非可換環論・表現論との関係も重要視されるようになっていった。Cohen-Macaulay 環、Gorenstein 環を調べるにあたっては、その正準加群 (標準加群) が大切な存在になる。正規代数多様体を調べる際にその標準層、標準因子は重要な役割を果たすが、その局所版である。標準層が自明である (マイルドな特異点を持つ) 代数多様体は重要なクラスをなすが、局所環論においても標準加群が存在してそれが自由加群であるネーター局所環は準 Gorenstein 環とって古くから調べられていた。ネーター局所環が Gorenstein であるための必要十分条件は Cohen-Macaulay かつ準 Gorenstein であることである。Gorenstein 環を非可換化した概念として、対称多元環, Frobenius 多元環, quasi-Frobenius 多元環があるが、これらに対応した「Cohen-Macaulay 性抜き」概念を 2017 年の論文で論じた。また、有限群の不変式環の Gorenstein 性に関する渡辺敬一の定理について、正標数で標数が群の位数を割る場合には一般には不変式環は Cohen-Macaulay ですらないのでそのままでは正しくないが、Gorenstein を準 Gorenstein に弱めると、擬鏡映を持たない、という仮定のもので、不変式環が準 Gorenstein になることと有限群が特殊線形群を通して作用していることが同値であることが知られている。このように Gorenstein 性について知られていることを準 Gorenstein 性について拡張することは懸案となっていた。特に、準 Gorenstein 性は deform するか (つまり、ネーター局所環  $A$  とその非単元である非零因子  $x$  について、 $A/xA$  が準 Gorenstein であるとき、 $A$  自身準 Gorenstein になるか) という問題は重要な問題である。また、可換なネーター環に関する理論のうち、ホモロジカルなものについては、いろいろな一般化の仕方によって、非可換環に翻案、もしくは一般化がされてきている。有限次元代数の場合が典型的であるが、比較的容易に高次元も含む可換環の理論が一般化される非可換化としては、ネーター代数 (中心上 module-finite であるようなネーター環) が挙げられ、可換環論プロパーの専門家もこの分野では大いに活躍している。こうした方向で、準 Gorenstein 環の理論、また、標準加群の理論を一般化してゆきたい。Cohen-Macaulay を非可換化したような状況では、多くのことが知られている状況であるが、単に標準加群が自明である、という形で理論展開されていないと思う。また、双対化複体を統一的に扱う理論というのは、Grothendieck や Verdier らによる捻じれ逆像の理論があり、これは導来圏、三角圏が導入されるきっかけとなった。こうした捻じれ逆像の理論を非可換化する、という試みも今のところ無いようであるが、その導入は、非可換の Grothendieck 双対性定理の定式化とその証明を導くと考えられ、大きなテーマである。上記のようなネーター代数の枠組みを一般化することを考えると、ネータースキーム  $X$  と、連接  $\mathcal{O}_X$  加群であるような  $\mathcal{O}_X$  代数の対を考えるだけで良い。有限次元代数も含む枠組みであるので、その重要さは計り知れない。

## 2 . 研究の目的

目的は3つである。

第一は、準 Gorenstein 性について調べる事であり、Gorenstein 性について知られていることが 準 Gorenstein 性についてどこまで成立するかが重要である。様々な可換環論における環論的性質というのは、射の性質に持ち上げられ、そのことによって柔軟な議論が可能となっているが、その中には Gorenstein 性の相対化が含まれている。いろいろな場合に Gorenstein 射は定義されているが、もっともよく知られているのは平坦射の場合であり、この場合は、単に各ファイバー環が Gorenstein 環であること、というのが定義となるが、まったく同様の定義を 準 Gorenstein 性について行った場合、A から B に 準 Gorenstein な局所環の局所射があり、A が quasi-Gorenstein のときに B も 準 Gorenstein か、という問題が分かっておらず、この研究のひとつの目的である。また、A がネーター局所環で、 $x$  がその極大イデアルから取った非零因子であるとき、A が Gorenstein であることと  $A/xA$  が Gorenstein であることは同値であるが、このことを 準 Gorenstein 性について敷衍できるか、ということも大事な問いであり、難しい。

第2の目的はねじれ逆像の理論の非可換化である。ねじれ逆像という擬関手によって、与えられた基礎となる双対化複体を持つネータースキーム上分離有限型であるスキームすべてについて、統一的な双対化複体の取扱いが可能となり、双対化複体の 0 ではない最初のコホモロジー群として、標準層も統一的に取扱い可能となる。この理論を非可換化したい。

第3の目的は  $n$  標準加群、 $n$  標準層の理論の構築である。Cohen-Macaulay 環上の標準加群は導来圏においては双対化複体そのものであり、極めて良い振る舞いをする。この理想的な状況に近い加群として、 $n$  標準加群を定義した。 $n$  は自然数を表し、 $n$  の値が大きいほど、この理想的な状況に近くなるようになっている。2 標準加群は Cohen-Macaulay 性の無い状況での標準加群を一般化したものになっている。Quasi-Gorenstein に相当する条件は  $(G_{\{n-1\}}) + (S_n)$  という条件になる。この性質について、標準加群に関する理論を一般化する形で理論を作りたい。

## 3 . 研究の方法

標準加群、準 Gorenstein 性について造詣の深い専門家に会って討論するために東京における日本大学のセミナー、東京大学におけるセミナーに出席した。各種研究集会に参加して可換環論に関する情報収集を行い、研究のレベル向上に努めた。また、代表者の大阪市立大学移籍後は共同研究を行ってきた松野高久君を訪ねて月に1回のペースで岡山に出かけて共同研究を続けた。

2020年3月には、研究成果のレビューを受けるため、イタリアの M. Rossi 教授、イギリスの P. Symonds 教授を訪ねる計画であったが、新型コロナウイルス感染症の拡大によって断念した。その後研究期間を延長して頂いて、本課題の研究を続けたが、研究打ち合わせは多くはオンラインによるものとなり、オンライン対応のための物品購入を多く行うこととなった。

標準加群の振る舞いを調べる過程で、ネータースキームの間の射の分岐跡の純性に関する Zariski-Nagata の定理の精密化に興味を持ち、体を含むケースについて D 加群について調べた。

#### 4 . 研究成果

上記 Zariski-Nagata の定理について、仮定として置かれている、射の擬有限性を外した。すなわち、 $k$  が体で、 $f: X \rightarrow Y$  がネーター  $k$  スキームの間の有限型の  $k$  射で、 $Y$  は正則、 $X$  は正規とする。このとき、 $\text{supp } \omega_{X/Y}$  は pure codimension 1 以下である、ということを証明した。ここに、 $X$  の閉部分集合  $F$  が pure codimension 1 以下であるとは、 $F$  の任意の既約成分が codimension 1 以下を持つ、ということの意味する。これによって定理の適用範囲が広がり、応用しやすくなったと思う。証明には  $D$  加群の理論とその正標数における類似を用いた。

これはヤコビアン予想という、有名な未解決問題とも関りがある。 $F: X = A^n \rightarrow A^n = Y$  を体  $k$  上のアフィン  $n$  空間からそれ自身へのエタールな  $k$  射とする。 $k$  の標数が 0 ならば、 $F$  は同型であろう、というのがヤコビアン予想で、アフィン代数幾何学における未解決問題である。この予想は、 $k[x_1, \dots, x_n]$  の  $n$  個の多項式  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$  について、そのヤコビアンが 1 で  $k$  の標数が 0 であれば  $k[f_1, \dots, f_n] = k[x_1, \dots, x_n]$  であろう、と言っても同じことであり、予想の名はそこから来ている。このような  $f_1, \dots, f_n$  が与えられたとしよう。そのとき、 $s$  を新しい変数とし、 $n+1$  変数多項式環  $B = k[s, sx_1, \dots, sx_n]$  を考え、 $A = B/K$  を考える。ここに、 $K = k(s, f_1, \dots, f_n)$  である。このとき、容易に分かるように、自然な射  $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  の分岐跡  $\text{supp } \omega_{X/Y}$  は余次元 2 以上である。これが pure codimension 1 以下を持つためには、分岐跡が空集合になるよりなく、容易にわかるように、ヤコビアン予想の結論が成立する。しかし、今  $A$  は正則スキームであるかどうかは不明(正規にはなっている)ので、上記の Zariski-Nagata の定理の改良版が直ちに適用できるわけではないが、このような新しいパラメーターを加えて考察を行う際に、擬有限性が良く分からないが、分岐跡の余次元が小さくなることは良く起こるので、この未解決問題への適用の道を探ることが今後の課題となってくると考えられる。

また、上記、松野高久君との共同研究で、与えられた体の上の positively graded なネーター環  $R$  について、有限生成次数付き  $R$  加群  $M$  が次数付き加群として直既約であることと、 $R$  加群として直既約であることは同値であることを証明した。知られている文献に事実として告知されているものは見かけるが、本質的に誤りであるもの以外の証明が示されたことはこれまで無かった。そこから分かることとして、有限生成次数付き  $R$  加群  $M$  と  $N$  について、 $R$  加群として  $M$  と  $N$  が同型であれば、 $N$  は、 $M$  を次数付き加群として直既約分解して、そのおのおのの直既約な直和因子をシフトしただけの加群と同型になっていることが分かる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mitsuyasu Hashimoto	4. 巻 484
2. 論文標題 F-rationality of the ring of modular invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 207-223
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2017.04.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuyasu Hashimoto	4. 巻 226
2. 論文標題 Canonical and n-canonical modules of a Noetherian algebra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 165-203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2016.44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuyasu Hashimoto and Peter Symonds	4. 巻 305
2. 論文標題 The asymptotic behavior of Frobenius direct images of rings of invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 144-164
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2016.09.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mitsuyasu Hashimoto	4. 巻 45
2. 論文標題 Equivariant class group. II. Enriched descent theorem	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 1509-1532
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2016.1178270	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuyasu Hashimoto	4. 巻 59
2. 論文標題 Higher-dimensional absolute versions of symmetric, Frobenius, and quasi-Frobenius algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. J. Okayama Univ.	6. 最初と最後の頁 131-140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 橋本光靖
2. 発表標題 Zariski-Nagata の定理について
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋本光靖
2. 発表標題 Zariski-Nagata の定理の改良について
3. 学会等名 Commutative Algebra Day in Kyoto
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Mitsuyasu Hashimoto
2. 発表標題 F-rationality of invariant subrings
3. 学会等名 PRIMA 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------